جامعة البعث — امتحانات الدورة الأولى للعام الدراسي 2013 – 2014
كلية العلوم — أسئلة مقرر البنى الجبرية (1) — العلامة: 100 درجة
قسم الرياضيات — سنة ثانية رياضيات — الاسم:

أجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الأول (36 درجة):

أجب بكلمة صح، أو خطأ لكل مما يلي، مع ذكر التعليل أو التصويب لحالة الخطأ فقط:

(1) إن $(Q^+ , *)$ زمرة حيث العملية * تعرف بالعلاقة $x * y = \frac{x \cdot y}{2}$ وذلك لكل $x , y \in Q^+$.

(2) إن المجموعة $U_6(20) = \{1 , 7 , 13 , 19\}$ هي زمرة جزئية من زمرة اولر $U(20)$.

(3) مرتبة العنصر (1-) في زمرة الأعداد الصحيحة Z تساوي 2 .

(4) إن مركز أي زمرة تبديلية G $(Z(G))$ يساوي G نفسها.

(5) إن مقلوب العنصر 9 في زمرة اولر $U(14)$ يساوي 5 .

(6) عدد عناصر الزمرة الجزئية $U_7(21)$ من زمرة اولر $U(21)$ يساوي 3 .

(7) عدد المرافقات اليسارية للزمرة الجزئية $H=\{1,7, 13, 19\}$ في زمرة اولر $U(30)$ يساوي 5.

(8) إن العنصر a^4 مولد للزمرة الدوارة $G = < a >$ والتي مرتبتها 10 .

(9) عدد عناصر زمرة الخارج $< 4 >/< 20 >$ يساوي 4 .

(10) عدد الهومومورفيزمات الزمرية من الزمرة Z_{20} إلى الزمرة Z_8 يساوي 2 .

(11) $U(8) \cong U(10)$

(12) رتبة العنصر $(2 , 3)$ من الزمرة $Z_5 \oplus Z_6$ يساوي 30 .

السؤال الثاني (40 درجة): لتكن $(G , \cdot) , (G' , \cdot)$ زمرتين ما، علل صحة ما يلي:

(1) إذا كانت G تبديلية فإن المجموعة $B = \{x^2 : x \in G\}$ هي زمرة جزئية من G .

(2) إذا كان $a \in G$ ومرتبته n فإنه أيا كان $t \in Z$ الذي يقسم n فإن رتبة $(a^{\frac{n}{t}})$ تساوي t.

(3) إذا كانت G زمرة منتهية مرتبتها عدد أولي، فإن G تكون زمرة دوارة .

(4) إذا كان $a , b \in G$ و H زمرة جزئية في G ، فإنه إما $aH \cap bH = \emptyset$ أو $aH = bH$.

(5) إذا كان $a \in G$ و $f : G \to G'$ ايزومورفيزما زمريا، فإن $o(a) = o(f(a))$ (o تعني مرتبة).

السؤال الثالث (24 درجة):

(1) لتكن G زمرة و H , K زمرتين جزئيتين ناظميتين في G بحيث $K \subseteq H$ ، ولتكن K ناظمية في H . اثبت أن زمرة الخارج $H/_K$ ناظمية في زمرة الخارج $G/_K$.

(2) إذا كانت $(G , .)$ ، p- زمرة (p عدد أولي)، فإن كل زمرة جزئية من G هي p- زمرة.

2014 - 2 - 3

مع أطيب التمنيات بالنجاح

د. إيمان الخوجة

(4)

سلم تصحيح مقرر الجبر ١/٢١

سنة ثانية رياضيات . الفصل الأول

للعام الدراسي 2013 - 2014

د. إيمان الخفاجي

الجواب الأول. [36 درجة] لكل سؤال ثلاث درجات

١- صح

٢- خطأ، لأن 6 لا ينتمي الى $U_6(20)$ لأن 20 أو $13 \times 13 = 9 \mod 20$.

٣- خطأ، غير منتهية.

٤- صح

٥- خطأ، لأن $9 \times 5 = 3 \mod 14$.

٦- خطأ، عدد عناصر الزمرة الجزئية $U_7(21)$ من الزمرة $U(21)$ تساوي 2.

٧- خطأ، يساوي 2

٨- خطأ، لأن $\gcd(4,10)=2$ وبالتالي a^4 ليس مولد لها.

٩- عدد عناصر زمرة الخارج $\frac{\langle 4 \rangle}{\langle 20 \rangle}$ يساوي 5.

١٠- عدد الهومومورفيزمات الزمرية من Z_{20} إلى Z_8 يساوي 4

١١- خطأ، لأن $U(8)$ ليست دوارة و $U(10)$ دوارة.

١٢- رتبة العنصر $(2,3)$ من الزمرة $Z_5 \oplus Z_6$ يساوي 10.

الجواب الثاني [40 درجة]

١) بما أن $e \in G$ فإن $e^2 \in B$ وبالتالي $B \neq \phi$. ليكن $a^2, b^2 \in B$

عندئذ $a, b \in G$ و $ab^{-1} \in G$ أي $(ab^{-1})^2 \in B$. من جهة أخرى نجد

$$a^2(b^2)^{-1} = a^2(b^{-1})^2 = (ab^{-1})(ab^{-1}) = (ab^{-1})^2 \in B$$

ومنه B زمرة جزئية من G.

(8)

(2) لتكن $t\in\mathbb{Z}$ يقسم n عندئذ $(a^{\frac{n}{t}})^t = a^{\frac{n}{t}t} = a^n = e$.

لتكن $\beta\in\mathbb{Z}$ بحيث $\beta<t$ و بحيث $(a^{\frac{n}{t}})^{\beta} = e$ عندئذ

فإن $a^{\frac{n}{t}\beta} = e$ وإن $\frac{n}{t}\beta<n$ وهذا يناقض كون $o(a)=n$.

مما سبق نجد $o(a^{\frac{n}{t}})=t$.

(3) لتكن G مرتبتها العدد الأولي p. إن $G\neq\langle e\rangle$ ومنه يوجد في G عنصر a بحيث $a\neq e$ لنأخذ الزمرة الجزئية $\langle a\rangle$ بما أن $\langle a\rangle\neq\langle e\rangle$ فإن $G=\langle a\rangle$. لأنه إذا كانت $G\neq\langle a\rangle$ فإن مرتبة الزمرة الجزئية $\langle a\rangle$ تقسم مرتبة الزمرة G (حسب مبرهنة لاغرانج) وهذا غير ممكن لأن p أولي إذاً $G=\langle a\rangle$ و G دوارة.

(4) إذا كان $aH\cap bH=\phi$ تم المطلوب. لنفرض أن $aH\cap bH\neq\phi$

عندئذ يوجد $x\in aH\cap bH$ وبالتالي فإن $x=ah_1=bh_2$

حيث $h_1,h_2\in H$، وهكذا فإن $a=bh_2h_1^{-1}$ ومن الخاصة إذا كان $a\in H$ فإن $aH=H$ نجد أن $aH=b(h_2h_1^{-1})H=bH$.

(5) لنفرض أن $o(a)=n$ و $o(f(a))=m$ عندئذ حسب خوارزمية القسمة يوجد $q,r\in\mathbb{Z}$ بحيث $n=qm+r$ و أن $0\le r<m$. لنفرض $r\neq 0$

عندئذ $e=a^n=a^{qm}a^r$ وبالتالي $e'=f(e)=f(a^{qm})f(a^r)=e'f(a^r)=(f(a))^r$

إذا $r=0$ و $n=qm$.

وهذا يناقض كون $o f(a)=m$

ومن جهة ثانية نجد أن $[f(a)]^n=[f(a)]^m=e'$ وبما أن f متباين نجد $a^n=a^m=e$ ومنه n يقسم m أي يوجد $s\in\mathbb{Z}$ بحيث $m=ns$ وهكذا $n=qm=nsq$ وهذا يبين أن $1=sq$ ومنه $s=q=1$

أي $n=m$

الجواب الثالث: [24 درجة]

1) من أجل ذلك نثبت أن H/K نواة لهومومورفيزم منطلقة G/K.

نعرف العلاقة: $\varphi : G/K \longrightarrow G/H$ على النحو الآتي $\varphi(gK) = gH$; $\forall gK \in G/K$

ان φ تطبيق لذلك نأخذ $g_1K , g_2K \in G/K$ بحيث $g_1K = g_2K$

عندئذ $g_1 \in g_1K = g_2K \subseteq g_2H$ ومنه $g_1H = g_2H$ أي أن $\varphi(g_1K) = \varphi(g_2K)$

كما أن φ هومومورفيزم لأن $\varphi(g_1K \cdot g_2K) = \varphi[(g_1g_2)K] = (g_1g_2)H = (g_1H)(g_2H) = \varphi(g_1K)\varphi(g_2K)$

لنبرهن أن $\ker\varphi = H/K$. ليكن $xK \in \ker\varphi$ عندئذ $\varphi(xK) = xH = H$

ومنه $x \in H$ وهكذا فان $xK \in H/K$ أي $\ker\varphi \subseteq H/K$. ليكن $yK \in H/K$

عندئذ $y \in H$ ومنه $\varphi(yK) = yH = H$ أي أن $yK \in \ker\varphi$ ومنه $H/K \subseteq \ker\varphi$

وبما أن $\ker\varphi$ ناظمية في G/K فان H/K ناظمية في G/K .

2) لتكن H زمرة جزئية من G عندئذ حسب مبرهنة لاغرانج فان:

لنفرض ان $(G:1) = p^n$ حيث $n \in \mathbb{N}^*$

$$p^n = (G:1) = (G:H)(H:1)$$

وهذا يبين أن $(H:1)$ تقسم المقدار p^n ومنه $(H:1) = p^s$ حيث

$0 \le s \le n$ ومنه H هي p- زمرة.

الهيئة الأكاديمية

د. إيمان الخوجة

جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحانات الدورة الإضافية للعام الدراسي 2013 - 2014
أسئلة مقرر البنى الجبرية (1)
سنة ثانية رياضيات

المدة: ساعة ونصف
العلامة: 100 درجة
الاسم:

أجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الأول (42 درجة):

أجب بكلمة صح، أو خطأ لكل مما يلي، مع ذكر التعليل أو التصويب لحالة الخطأ فقط:

(1) إن المجموعة $\{3, 0\}$ زمرة جزئية من الزمرة Z_4 .

(2) إن عدد عناصر الزمرة الجزئية $<25>$ من الزمرة Z_{30} يساوي 5.

(3) عدد مولدات الزمرة الدوارة ذات المرتبة 5 يساوي 5.

(4) إذا كان $n \in Z^+$ ، فإن $Z/_{nZ}$ زمرة دوارة من المرتبة n .

(5) إذا كانت $(G, .)$ زمرة و $a \in G$ عنصراً مرتبته 15 فإن مرتبة العنصر a^6 في G تساوي 10.

(6) إن كل زمرة دوارة غير منتهية تملك مولداً واحداً.

(7) عدد الزمر الجزئية في الزمرة $U(7)$ يساوي 7 زمر جزئية.

(8) إن مقلوب العنصر 3 في زمرة أولر $U(7)$ يساوي 5 .

(9) إذا كانت G زمرة مرتبتها 29 فإن G تكون زمرة دوارة .

(10) عدد الهومومورفيزمات الزمرية من الزمرة Z_{15} إلى الزمرة Z_{30} يساوي 5.

(11) إن العنصر a^5 مولد للزمرة الدوارة $G = < a >$ والتي مرتبتها 21 .

(12) عدد عناصر زمرة الخارج $U(20)/_{U_4(20)}$ يساوي 5 .

(13) رتبة العنصر $(1, 2)$ من الزمرة $Z_3 \oplus Z_4$ يساوي 12.

(14) إن $Z_2 \oplus Z_4 \cong Z_8$.

السؤال الثاني (30 درجة): لتكن $(G, \cdot)$ زمرة ما، علل صحة ما يلي:

(1) أياً كان $a \in G$، فإن المجموعة $C(a) = \{x : x \in G;\ ax = xa\}$ هي زمرة جزئية من G.

(2) إذا كانت $G = <a>$ دوارة وكان التطبيق $\varphi : Z \to G$ المعرف على النحو: $\varphi(n) = a^n$ متبايناً فإن G تكون غير منتهية.

(3) إذا كانت G منتهية مرتبتها pq حيث p, q عددان أوليان ليسا بالضرورة مختلفان ، فإن مرتبة مركز الزمرة G $(Z(G))$ ، إما أن تساوي 1 أو تساوي pq .

(4) إذا كانت H زمرة جزئية في G وكان $(G:H)=2$، فإن الزمرة الجزئية H تكون ناظمية في G.

(5) جميع الزمر الدوارة المنتهية التي لها المرتبة ذاتها متماثلة.

السؤال الثالث (28 درجة): لتكن $(G, .)$ زمرة ما .

(1) اذكر نص مبرهنة لاغرانج وبرهانها . ثم اذكر نص عكسها .

(2) إذا كانت A زمرة جزئية ناظمية في G ودوارة، فإن أية زمرة جزئية من A تكون ناظمية في G.

(3) ليكن p عدداً أولياً . عرف الـ P- زمرة. ثم أثبت أنه إذا كانت K زمرة جزئية ناظمية في G وكان كل من الزمرتين $G/_K$ ، K هي p- زمرة ، فإن G تكون p- زمرة.

2014 - 8 - 21

مع أطيب التمنيات بالنجاح
د. إيمان الخوجة

(ع)

د. إيمان الخوجة

سلم تصحيح مقرر الجبر /1/

للسنة الثانية رياضيات

الدورة الامتحانية للعام الدراسي 2013-2014

تاريخ الامتحان 2/8/2014.

الجواب الأول (42 درجة) لكل بند (3) درجات

1) خطأ، نظير 3 هو 1 لا ينتمي إلى Z_4.

2) خطأ، عدد عناصر الزمرة $\langle 25 \rangle$ في Z_{30} يساوي 6.

3) خطأ، يساوي 4 مولدات

4) صح.

5) خطأ، $o(a^6)=5$ لأن $(a^6)^5 = a^{30} = e$.

6) خطأ، ثلاث مولدين.

7) خطأ، 4 زمر جزئية.

8) صح.

9) صح.

10) خطأ، عدد الهومومورفيزمات يساوي 15.

11) صح

12) خطأ، يساوي 2.

13) خطأ، يساوي 6.

14) خطأ، لأن 2,4 ليسا أوليان فيما بينهما.

الجواب الثاني (30 درجة).

1) بما أن $ea = ae$ أيا كان $a \in G$ نجد أن $e \in C(a)$. ليكن $x, y \in C(a)$
(4)
عندئذ $ax = xa$ و $ay = ya$ ومنه $y^{-1}a = ay^{-1}$

كما أن $(xy^{-1})(a) = x(y^{-1}a) = x(ay^{-1}) = (a)xy^{-1}$

ومنه $xy^{-1} \in C(a)$.

د. إيمان الخوص

الجبر /١/

الصفحة الثانية

إن التطبيق $\varphi: Z \longrightarrow G$ غامر لذلك $\forall y \in G$

فإنه يوجد $m \in Z$ بحيث أن $y = a^m$ ومن ثم فإن $\varphi(m) = a^m$.

وبما أن φ متباين فرضاً فإن φ تقابل ومنه قدرة G = قدرة Z

أي G غير منتهية.

(6) 3) $Z(G)$ زمرة جزئية من G ومنه حسب لاغرانج $(Z(G):1) \in \{1, p, q, pq\}$

وهنا نميز حالتين: 1) إذا كانت G تبديلية عندئذ $G = Z(G)$ ومنه $(Z(G):1) = pq$. 2) G ليست تبديلية عندئذ $(Z(G):1) \neq pq$.

لنفرض $(Z(G):1) = p$ عندئذ $(G/Z(G):1) = q$ ومنه $G/Z(G)$ دوارة

ومنه G تبديلية وهذا مرفوض فرضاً. كذلك الأمر عندما $(Z(G):1) = q$.

مما سبق نجد $(Z(G):1) = 1$.

4) بما أن $(G:H) = 2$ فإن مجموعة المرافقات اليسارية المختلفة لـ H في G

(7) هي $\{H, aH\}$ حيث $a \in G$ وهنا نميز حالتين: إذا كان $a \in H$ فإن $aH = Ha$

إذا كان $a \notin H$ وبما أن $G = H \cup aH$ نجد أن $aH = G/H = Ha$

وبالتالي H ناظمية في G.

5) كل زمرة منتهية دوارة من المرتبة n إيزومورفية مع Z_n

(6) وبالتالي جميع الزمر الدوارة المنتهية من المرتبة n ; مع Z_n ومنه تكون متماثلة مع بعضها.

الجواب الثالث [28 درجة]

1) مبرهنة لاغرانج: G زمرة منتهية. مرتبة أي زمرة جزئية H من G تقسم مرتبة G.

البرهان: لنفرض $a_1H, a_2H, \dots, a_nH$ جميع المرافقات اليسارية المختلفة لـ H في G. وبما أن المجموعة $M = \{a_iH : 1 \le i \le n\}$

$x, y \in C(a)$

$y^{-1}a =$

$(xy^{-1}$

. ١٠٢

الصفحة الثالثة

تشكل تجزئة لـ G فإن $G = a_1H \cup a_2H \cup \dots \cup a_nH$

ومنه $(G:1) = \text{Card}\, a_1H + \text{Card}\, a_2H + \dots + \text{Card}\, a_nH$

وبأن $\text{Card}\, a_iH = \text{Card}\, H$ نجد $(G:1) = n\, \text{Card}\, H$:

أي $(G:1) = (G:H)(H:1)$.

نقض عكس مبرهنة لاغرانج . إذا وجد عدد K يقسم مرتبة G فليس من الضروري إيجاد زمرة جزئية مرتبتها K .

2) $A = \langle a \rangle$ وناظمية في G حيث $a \in A$. لتكن T زمرة جزئية من A عندئذ T جزئية في G ودوارة . لنفرض $T = \langle a^m \rangle$ ولنبرهن أن $gTg^{-1} \subseteq T$ أيا كان $g \in G$. ليكن $z \in gTg^{-1}$ عندئذ يوجد $(a^m)^k \in T$ بحيث $z = g(a^m)^k g^{-1}$ ومنه وبأن A ناظمية في G فإن $(gag^{-1})^k = ga^kg^{-1} \in A$ ومنه $ga^kg^{-1} = a^s$ حيث $s \in \mathbb{Z}$

وهذا يبين أن $z = g(a^m)^k g^{-1} = g(a^k)^m g^{-1} = [g a^k g^{-1}]^m = (a^s)^m = (a^m)^s \in T$

ومنه T ناظمية في G

3) G هي P- زمرة ، مرتبتها قوة للعدد الأولي P ، 2

إن $(G/K : 1) = P^r$ و $(K:1) = P^s$ وبما أن

وحسب لاغرانج يكون $(G:K) = (G/K : 1) = P^r$ ،

$(G:1) = (G:K)(K:1) = P^r P^s = P^{r+s}$ 7

ومنه G عبارة عن P- زمرة .

انتهت الأجوبة

د. إيمان الخوص
[illegible]

جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحانات الدورة الأولى للعام الدراسي 2014 - 2015
أسئلة مقرر البنى الجبرية (1)
سنة ثانية رياضيات

المدة: ساعة ونصف
العلامة: 100 درجة
الاسم:

أجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الأول (42 درجة):

أجب بكلمة صح، أو خطأ لكل مما يلي، مع ذكر التعليل أو التصويب لحالة الخطأ فقط.

(1) إن المجموعة $\{1, 2, 3\}$ زمرة بالنسبة لعملية الضرب بالمقاس 5 .
(2) إن عدد عناصر الزمرة الجزئية $U_5(20)$ من الزمرة $U(20)$ يساوي 5.
(3) مرتبة العنصر (1-) في الزمرة $(Q^*, \cdot)$ غير منتهية كون Q^* زمرة غير منتهية.
(4) جميع مولدات الزمرة الجمعية Z_{20} التي لا تساوي 1 هي أعداد أولية.
(5) كل زمرة دوارة غير منتهية تملك مولد واحد فقط.
(6) إذا كانت $(G, .)$ زمرة و $a \in G$ عنصراً مرتبته 15 فإن مرتبة العنصر a^9 في G تساوي 10.
(7) عدد الزمر الجزئية في الزمرة $U(11)$ يساوي 11 زمر جزئية.
(8) إن مقلوب العنصر 3 في زمرة أولر $U(7)$ يساوي 5 .
(9) إذا كان $\varphi: Z_{30} \to Z_{30}$ تشاكلا وكان $\text{Ker}\,\varphi = \{0, 10, 20\}$ و $\varphi(23) = 6$ فإن $\varphi^{-1}(6) = 23 \cdot \ker\varphi$.
(10) عدد الهومومورفيزمات (التشاكلات) الزمرية من الزمرة Z_{20} إلى الزمرة Z_{10} يساوي 5.
(11) إن العنصر a^5 مولد للزمرة الدوارة $G = < a >$ والتي مرتبتها 20 .
(12) عدد عناصر زمرة الخارج $U(20)/U_4(20)$ يساوي 5 .
(13) رتبة العنصر (2 , 3) من الزمرة $Z_3 \oplus Z_4$ يساوي 6 .
(14) إن $Z_2 \oplus Z_2 \cong U(12)$.

السؤال الثاني (30 درجة): لتكن $G , G`$ زمرتين ما، علل صحة ما يلي:

(1) إذا كانت G تبديلية فإن المجموعة $H = \{ x : x \in G; x^2 = e \}$ هي زمرة جزئية من G.
(2) إذا كانت $G = <a>$ دوارة وكان التطبيق $\varphi : Z \to G$ المعرف على النحو: $\varphi(n) = a^n$ متباينا فإن G تكون غير منتهية.
(3) إذا كان $a , b \in G$ بحيث $a \cdot b \in Z(G)$ حيث $Z(G)$ مركز الزمرة G، فإن $a . b = b . a$.
(4) إذا كانت G منتهية مرتبتها pq حيث p, q عددان أوليان ليسا بالضرورة مختلفان ، فإن مرتبة مركز الزمرة G $(Z(G))$ ، إما أن تساوي 1 أو تساوي pq .
(5) إذا كان $f: G \to G`$ تشاكلا زمريا و $g \in G$ حيث $f(g) = g`$ ، فإن
$f^{-1}(g`) = \{ x : x \in G, f(x) = g` \} = g . \text{Ker}\, f$

السؤال الثالث (28 درجة): لتكن $(G , .)$ زمرة ما و A, B زمرتين جزئيتين من G. أثبت مايلي:

(1) إذا كانت كلاً من الزمرتين A, B ناظمية في G ، فإن الجداء $A \cdot B$ هو زمرة ناظمية في G.
(2) كل زمرة منتهية مرتبتها عدد أولي هي زمرة دوارة.
(3) إذا كان p عدداً أولياً. عرف الـ P- زمرة جزئية سيلوفية في الزمرة G. ثم ادرس الزمرة التي مرتبتها 40.

2015 - 1 - 20

مع أطيب التمنيات بالنجاح

د. إياد الأحمد

سلم تصحيح مقرر البنى الجبرية /1/ ٩ د. إيمان الخوجة

سنة ثانية رياضيات

الدورة الأولى لعام 2014 - 2015

السؤال الأول [42 درجة] لكل بند 3 درجات

1) خطأ، العملية (.) ليست داخلية.

2) خطأ، يساوي 4.

3) خطأ، $o(-1) = 2$.

4) خطأ، 9 مولد لها وليس أولي.

5) خطأ، تملك مولدين.

6) خطأ، يساوي 5.

7) خطأ، يساوي 4.

8) صح.

9) خطأ، $\varphi^{-1}(6) = 23 + \ker f$

10) خطأ، يساوي 10.

11) خطأ، لأن $d(5,20) \neq 1$

12) خطأ، يساوي 4.

13) خطأ، يساوي 12.

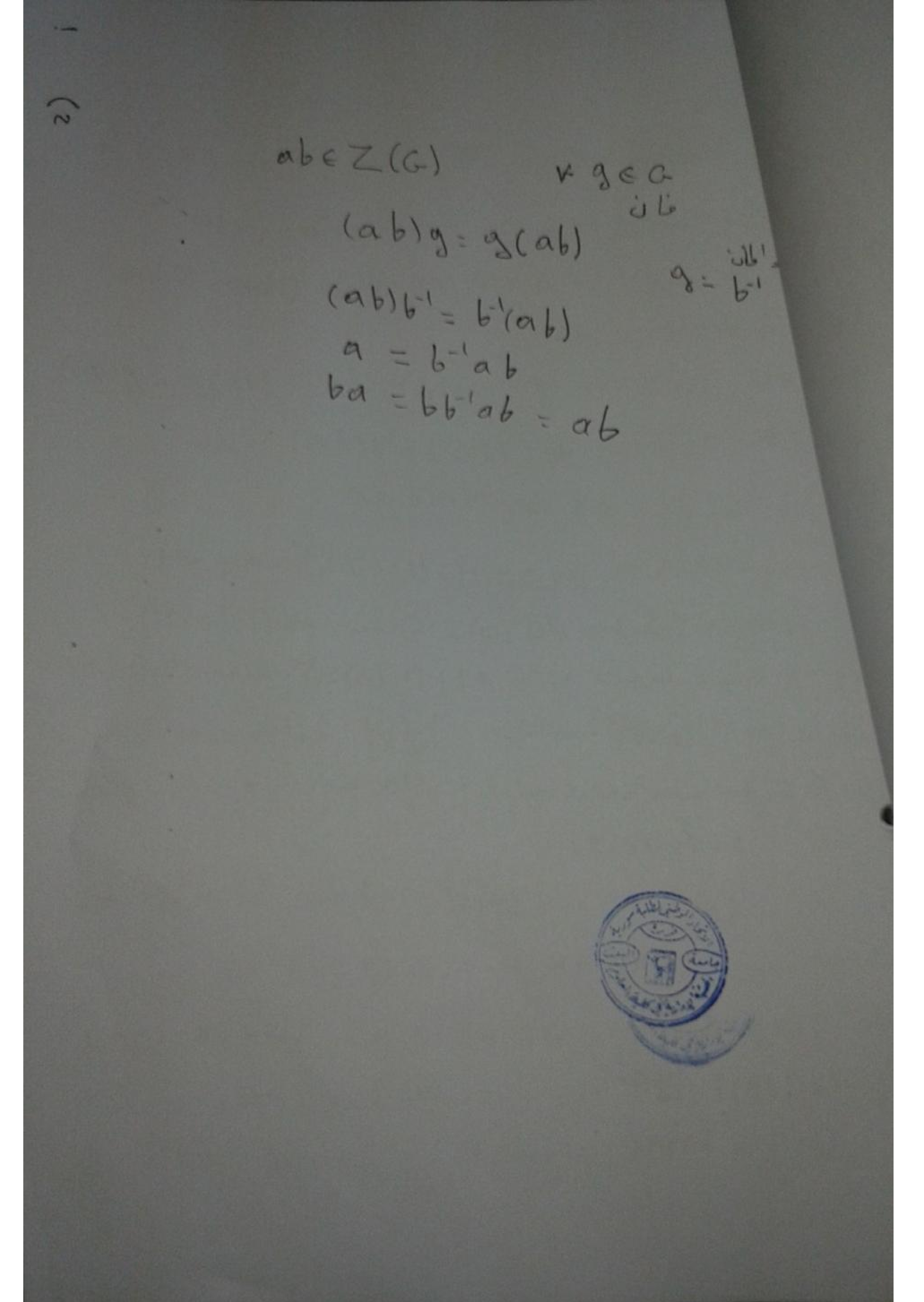
14) صح.

الجواب الثاني [30 درجة] لكل بند 6 درجات

1) بما أن $e^2 = e$ فإن $e \in H$ ومنه $H \neq \phi$. ليكن $x, y \in H$ عندئذ

$$(xy^{-1})^2 = (xy^{-1})(xy^{-1}) = x^2(y^2)^{-1} = ee^{-1} = e \Rightarrow xy^{-1} \in H$$

أي H زمرة جزئية من G.



$ab \in Z(G)$ $\forall g \in G$

فان

$(ab)g = g(ab)$

الان $g = b^{-1}$

$(ab)b^{-1} = b^{-1}(ab)$

$a = b^{-1}ab$

$ba = bb^{-1}ab = ab$

إن التطبيق $\Phi: \mathbb{Z} \to G$ غامر لأنه $\forall y \in G$ فإنه
يوجد $m \in \mathbb{Z}$ بحيث $y = a^m$ ومن ثم فإن $\varphi(m) = a^m = y$.
أي أن φ متباين فرضاً فإن φ تقابل وبالتالي $\mathrm{card}\, \mathbb{Z} = \mathrm{card}\, G$
ومنه G غير منتهية.

بما أن $ab \in Z(G)$ فإنه $\forall g \in G$ فإن $(ab)g = g(ab)$
فإذا كان $g = b^{-1} \in G$ فإن $(ab)b^{-1} = b^{-1}(ab)$ ومنه
$a = b^{-1}(ab) \Rightarrow ba = bb^{-1}ab = ab$

4) حسب لاغرانج نجد $(Z(G):1) \in \{1, p, q, pq\}$ وهنا نميز حالتين.

1- إذا كانت G تبديلية فإن $G = Z(G)$ ومنه $(Z(G):1) = pq$.

2) G ليست تبديلية عندئذ $(Z(G):1) \neq pq$. لنفرض أن $(Z(G):1) = p$
عندئذ $\left(G/Z(G) : 1\right) = q$ وبالتالي $G/Z(G)$ دوارة وهذا يؤدي إلى
أن G تبديلية وهذا مرفوض فرضاً وكذلك الأمر عندما $(Z(G):1) = q$
ومنه $(Z(G):1) = 1$.

5) ليكن $x \in f^{-1}(g')$ عندئذ $f(x) = g' = f(g)$ ومنه $f(g^{-1}x) = e' \Leftarrow$
ومنه $g^{-1}x \in \ker f$ أي $x \in g\ker f$. $f^{-1}(g') \subseteq g\ker f$.

ليكن $y \in g\ker f$ عندئذ $y = gx \in G$ حيث $x \in \ker f$ ومنه
$f(y) = f(g)f(x) = g'$ أي $y \in f^{-1}(g')$ وبالتالي
$g\ker f \subseteq f^{-1}(g')$. مما سبق نجد $f^{-1}(g') = g\ker f$.

٦/ ٢ نابت /٦١

ـب الثالث:

بما أن كلاً من A, B ناظمية فإن AB زمرة جزئية من G

من أنه $\forall g \in G$ فإن $g(AB)g^{-1} \subseteq AB$

ـن $y \in g(AB)g^{-1}$ عندئذ يوجد $a \in A, b \in B$ حيث

$y = g(ab)g^{-1} =$

$= (gag^{-1})(gbg^{-1}) \in A$ ومنه AB ناظمية في G.

2) لنفرض مرتبة G العدد الأولي P. أن $G \neq \langle e \rangle$ ومنه يوجد في G عنصر $a \neq e$. لنأخذ $\langle a \rangle$. بما أن $\langle a \rangle \neq \langle e \rangle$ فإن $G = \langle a \rangle$ لأنه بالحالة المعاكسة تكون مرتبة $\langle a \rangle$ تقسم مرتبة G حسب لاغرانج وهذا غير ممكن لأن P عدد أولي ومنه $G = \langle a \rangle$.

3) G زمرة و H جزئية من G. تكون H P-زمرة جزئية سيلوفية في $G \Longleftrightarrow$ مرتبتها أكبر قوة للعدد الأولي P تقسم مرتبة الزمرة G.

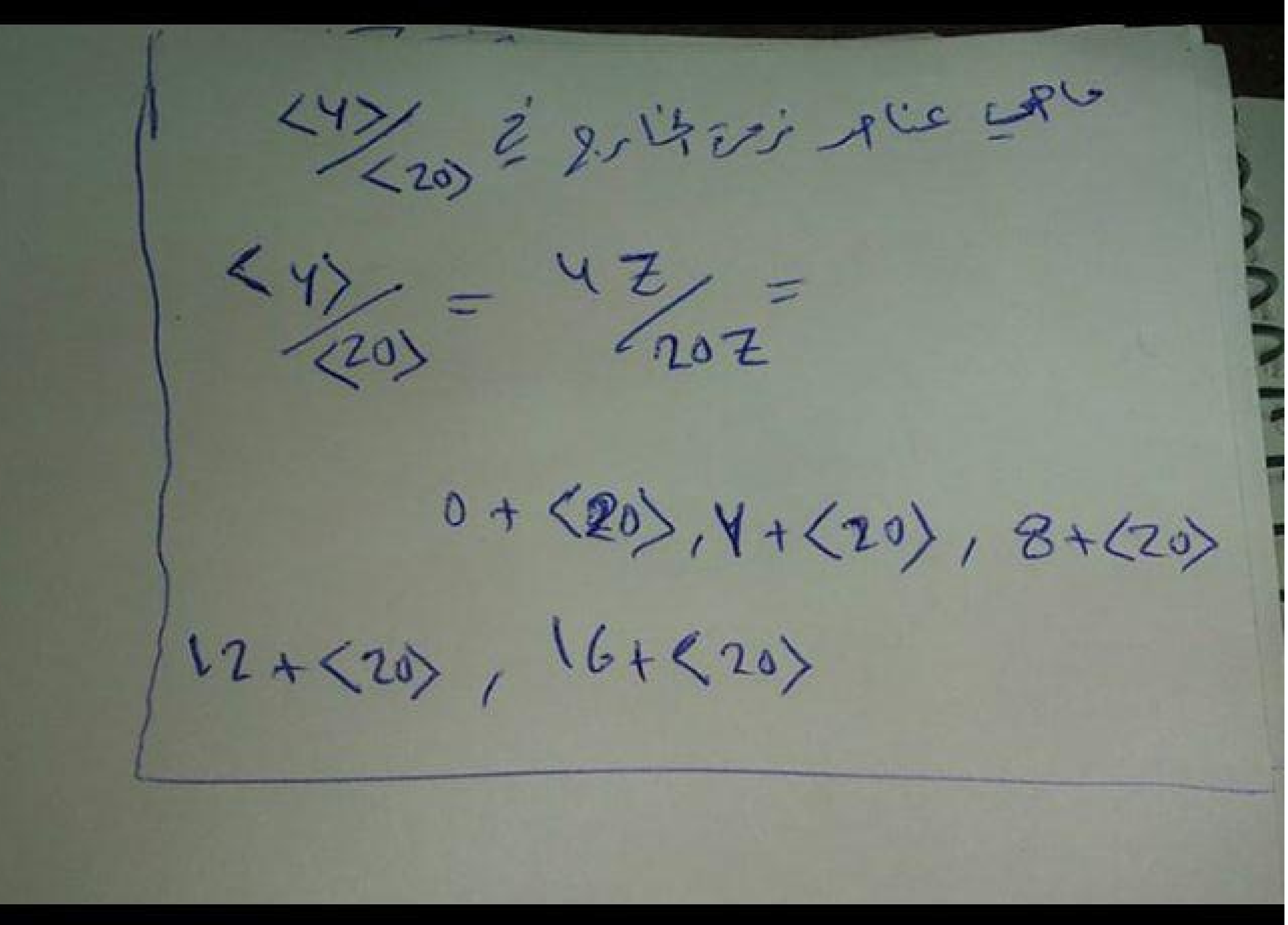
دراسة الزمرة التي مرتبتها 40. إن $(G:1) = 2^3 \cdot 5$ حسب سيلو الأولى G تحوي 5-زمرة جزئية سيلوفية مرتبتها 5 كما أن G تحوي 2-زمرة جزئية سيلوفية مرتبتها 8. إن عدد جميع الـ 5-زمر الجزئية السيلوفية التي مرتبة كل منها 5 حسب سيلو الثالثة يعطى بالعلاقة $1 + K5$ ونلاحظ من أجل $K \neq 0$ فإن العدد $1 + K5$ لا يقسم 40 ومنه توجد 5-زمرة جزئية سيلوفية واحدة فقط في G. لنرمز لها بـ K وهي ناظمية.

كما أن عدد جميع الـ 2-زمر جزئية سيلوفية في G والتي مرتبة كل منها 8 إما 1 أو 5 لتكن H احداها. عندئذ KH زمرة جزئية من G وبما أن $H \subseteq KH$, K فإن مرتبة KH يجب أن تقبل القسمة على 8 و 5 حسب لاغرانج ومنه $(KH:1) = 40$ إذاً $G = KH$

انتهت الأجوبة

د. إيمان الخوجه

تاريخ الامتحان 2015/1/20


ماهي عناصر زمرة الخارج $\langle 4\rangle / \langle 20\rangle$ في
$\langle 4\rangle / \langle 20\rangle = 4\mathbb{Z} / 20\mathbb{Z} =$
$0 + \langle 20\rangle , 4 + \langle 20\rangle , 8 + \langle 20\rangle$
$12 + \langle 20\rangle , 16 + \langle 20\rangle$

جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحانات الدورة الثانية للعام الدراسي 2013 - 2014
أسئلة مقرر البنى الجبرية (1)
سنة ثانية رياضيات

المدة: ساعة ونصف
العلامة: 100 درجة
الاسم:

أجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الأول (42 درجة):

أجب بكلمة صح، أو خطأ لكل مما يلي، مع ذكر التعليل أو التصويب لحالة الخطأ فقط:

(1) إن $(Z^+, *)$ زمرة، حيث العملية * تعرف بالعلاقة $x * y = \frac{x}{y}$ وذلك لكل $x, y \in Z^+$

(2) إن عناصر الزمرة الجزئية $U_4(20)$ من زمرة أولر $U(20)$ هي المجموعة $\{1, 9, 13\}$.

(3) أي عنصر من عناصر زمرة دوارة يكون مولداً لها.

(4) إذا كان $n \in Z^+$، فإن $Z/_{nZ}$ زمرة دوارة من المرتبة n.

(5) إذا كانت $(G, .)$ زمرة و $a \in G$ عنصراً مرتبته 15 فإن مرتبة العنصر a^6 في G تساوي 10.

(6) إن مركز أي زمرة تبديلية G $(Z(G))$ يساوي G نفسها.

(7) عدد الزمر الجزئية في الزمرة $U(14)$ يساوي 7 زمر جزئية.

(8) إن مقلوب العنصر 13 في زمرة أولر $U(14)$ يساوي 5.

(9) إذا كانت G زمرة مرتبتها 31 فإن G لا تكون زمرة دوارة.

(10) جميع المرافقات اليسارية للزمرة الجزئية $H = U_5(20)$ في زمرة أولر $U(20)$ هم $\{H, 3H, 9H\}$.

(11) إن العنصر a^6 مولد للزمرة الدوارة $G = < a >$ والتي مرتبتها 21.

(12) عدد عناصر زمرة الخارج $Z_{30}/_{< 20 >}$ يساوي 20.

(13) رتبة العنصر $(2, 6)$ من الزمرة $Z_4 \oplus Z_{12}$ يساوي 4.

(14) إن $U(5) \cong U(10)$.

السؤال الثاني (28 درجة): لتكن $(G, .)$ زمرة ما، علل صحة ما يلي:

(1) لتكن G تبديلية و $n \in Z$، عندئذ المجموعة $H = \{x : x \in G;\ x^n = e\}$ هي زمرة جزئية من G.

(2) إذا كان $a \in G$ ومرتبته n فإنه أياً كان $t \in Z$ الذي يقسم n فإن رتبة $(a^{\frac{n}{t}})$ تساوي t.

(3) إذا كانت G منتهية غير تبديلية مرتبتها P^3 (P عدد أولي) و $Z(G) \neq < e >$ فإن $(Z(G):1) = P$.

(4) إذا كانت G دوارة وغير منتهية، فإنها تكون أيزومورفية (تماثل) مع زمرة الأعداد الصحيحة.

السؤال الثالث (30 درجة):

(1) لتكن G زمرة و H ، K زمرتين جزئيتين ناظميتين في G بحيث $K \subseteq H$ ، ولتكن K ناظمية في H. أثبت أن زمرة الخارج $H/_K$ ناظمية في زمرة الخارج $G/_K$.

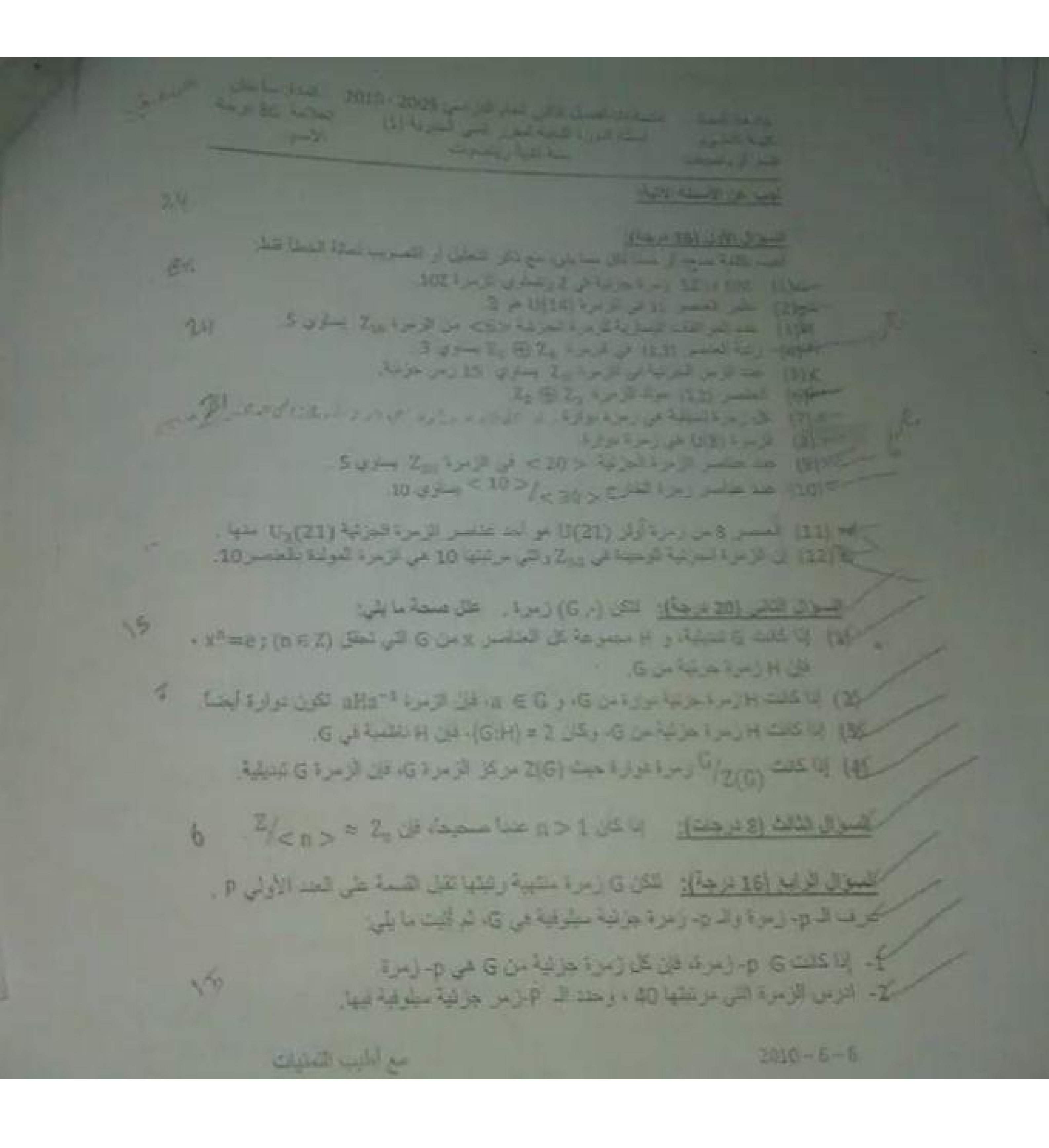
(2) لتكن G زمرة منتهية. اذكر نص عكس مبرهنة لاغرانج، ثم عرف الـ P- زمرة، وأثبت أنه إذا كانت G، P- زمرة و K زمرة جزئية ناظمية في G فإن الزمرة $G/_K$ تكون P- زمرة (حيث P عدد أولي).

(3) لتكن مرتبة G تقبل القسمة على P. عرف الـ P- زمرة سيلوفية ثم ادرس الزمرة التي مرتبتها 35.

2014 - 6 - 5

مع أطيب التمنيات بالنجاح

د. إيمان الشلوحة



امتحانات الفصل الثاني للعام الدراسي 2009 - 2010

أجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الأول (36 درجة):

أجب بكلمة صح أو خطأ لكل مما يلي، مع ذكر التعليل أو التصويب لحالة الخطأ فقط.

(1) $10Z$ و $5Z$ زمرة جزئية في Z وتساوي الزمرة $10Z$.

(2) نظير العنصر 11 في الزمرة $U(14)$ هو 3.

(3) عدد المرافقات اليسارية للزمرة الجزئية $<10>$ من الزمرة Z_{25} يساوي 5.

(4) رتبة العنصر $(1,3)$ في الزمرة $Z_4 \oplus Z_6$ يساوي 3.

(5) عدد الزمر الجزئية في الزمرة Z يساوي 15 زمرة جزئية.

(6) العنصر $(1,1)$ يولد الزمرة $Z_2 \oplus Z_3$.

(7) كل زمرة تبديلية هي زمرة دوارة.

(8) الزمرة $U(8)$ هي زمرة دوارة.

(9) عدد عناصر الزمرة الجزئية $<20>$ في الزمرة $Z_{[illegible]}$ يساوي 5.

(10) عدد عناصر زمرة الخارج $<10>/<30>$ يساوي 10.

(11) العنصر 8 من زمرة الوحدات $U(21)$ هو أحد عناصر الزمرة الجزئية $U_3(21)$ منها.

(12) إن الزمرة الجزئية الوحيدة في $Z_{[illegible]}$ والتي مرتبتها 10 هي الزمرة المولدة بالعنصر 10.

السؤال الثاني (20 درجة): لتكن $(G,\cdot)$ زمرة، علل صحة ما يلي:

(1) إذا كانت G تبديلية، و H مجموعة كل العناصر x من G التي تحقق $x^n=e\ ;\ (n \in Z)$، فإن H زمرة جزئية من G.

(2) إذا كانت H زمرة جزئية دوارة من G، و $a \in G$، فإن الزمرة aHa^{-1} تكون دوارة أيضاً.

(3) إذا كانت H زمرة جزئية من G، وكان $(G:H)=2$، فإن H ناظمية في G.

(4) إذا كانت $G/Z(G)$ زمرة دوارة حيث $Z(G)$ مركز الزمرة G، فإن الزمرة G تبديلية.

السؤال الثالث (8 درجات): إذا كان $n > 1$ عدداً صحيحاً، فإن $Z/<n> \cong Z_n$

السؤال الرابع (16 درجة): لتكن G زمرة منتهية رتبتها تقبل القسمة على العدد الأولي p.

عرف الـ p- زمرة والـ p- زمرة جزئية سيلوفية في G، ثم أثبت ما يلي:

1- إذا كانت G p- زمرة، فإن كل زمرة جزئية من G هي p- زمرة.

2- ادرس الزمرة التي مرتبتها 40، وحدد الـ p- زمر جزئية سيلوفية فيها.

مع أطيب التمنيات

2010-6-6

جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحانات الدورة التكميلية للعام الدراسي 2012 – 2013
أسئلة مقرر البنى الجبرية (1)
سنة ثانية رياضيات

العلامة: 100 درجة
الاسم:

أجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الأول (33 درجة):

أجب بكلمة صحيح أو خطأ لكل مما يلي، مع ذكر التعليل أو التصويب لحالة الخطأ فقط:

(1) إن $3Z \cup 5Z = 8Z$ في زمرة الأعداد الصحيحة $(Z, +)$.
(2) إن $H = \{x : x \in U(20);\ x \equiv 1 \bmod 3\}$ هي زمرة جزئية من $U(20)$.
(3) إن نظير العنصر 11 في زمرة أولر $U(14)$ هو 11.
(4) مرتبة العنصر $<8> + 3$ في زمرة الخارج $Z_{24}/<8>$ تساوي 3.
(5) عدد المرافقات اليسارية للزمرة الجزئية $H = <3>$ في الزمرة Z_9 يساوي 9.
(6) إن الزمرة $Z_2 \oplus Z_4$ هي زمرة دوارة.
(7) جداء زمرتين جزئيتين في زمرة ما G هو زمرة جزئية فيها.
(8) عدد الزمر الجزئية في الزمرة $U(10)$ يساوي 5 زمر جزئية.
(9) كل زمرة دوارة غير منتهية تملك مولدين فقط.
(10) عدد الهومومورفيزمات الزمرية من الزمرة Z_{12} إلى الزمرة Z_{30} يساوي 12.
(11) إن $U(10) \cong U(12)$ لأن للزمرتين الرتبة نفسها.

السؤال الثاني (7 درجات): لتكن $G = U(32)$ و $H = U_{16}(32)$. أوجد جميع المرافقات اليسارية للزمرة H في G، ثم أوجد زمرة الخارج G/H.

السؤال الثالث (20 درجة): لتكن $(G, \cdot)$ زمرة ما، علل صحة ما يلي:

(1) إذا كان $a \in G$، فإن المجموعة $<a> = \{a^n : n \in Z\}$ هي زمرة جزئية تبديلية من G.
(2) إذا كان $a \in G$ مرتبته n، فإنه إذا كان $t \in Z$ الذي يقسم n فإن $O\left(a^{\frac{n}{t}}\right) = t$.
(3) إذا كانت H زمرة جزئية من G، وإذا كان $a \in G$ و $aH = H$ فإن $a \in H$.
(4) جميع الزمر الدوارة المنتهية التي لها المرتبة ذاتها متماثلة (إيزومورفية مع بعضها).

السؤال الثالث (40 درجة): لتكن $(G, \cdot)$ زمرة ما، أثبت ما يلي:

(1) إذا كانت G زمرة منتهية مرتبتها عدد أولي، فإن G تكون زمرة دوارة.
(2) كل زمرة جزئية ناظمية في الزمرة G هي نواة لهومومورفيزم زمري غامر.
(3) إذا كانت A زمرة جزئية ناظمية في G ودوارة، فإن أية زمرة جزئية من A تكون ناظمية في G.
(4) إذا كانت H, K زمرتين جزئيتين من G، و K ناظمية في G، فإن $H/H \cap K \cong HK/K$.

جامعة البعث	امتحان الدورة الإضافية لمقرر البنى الجبرية 1	المدة: ساعتان
كلية العلـوم	للعام الدراسي 2010 - 2011	العلامة: 100 درجة
قسم الرياضيات	سنة ثانية رياضيات	الاسم:

أجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الأول (36 درجة):

أجب بكلمة صح، أو خطأ لكل مما يلي، مع ذكر التعليل أو التصويب لحالة الخطأ فقط:

(1) $(8Z , +)$ زمرة جزئية من الزمرة $(16Z , +)$.

(2) إن عناصر الزمرة الجزئية $U_5(20)$ من الزمرة $U(20)$ هي $\{1, 11, 17\}$ فقط.

(3) عدد المرافقات للزمرة الجزئية $6Z$ في الزمرة $(2Z , +)$ يساوي 4 .

(4) عدد الزمر الجزئية في الزمرة الدوارة $G = <a>$ والتي مرتبتها 15 يساوي 5 زمر جزئية.

(5) $5Z \cap 3Z = 8Z$.

(6) الزمرة $Z_3 \oplus Z_5$ زمرة دوارة .

(7) عدد مولدات الزمرة الجمعية Z_{12} يساوي 12 .

(8) $U(14) = < 5 >$.

(9) عدد الهومومورفيزمات الزمرية من الزمرة Z_{12} إلى الزمرة Z_{30} يساوي 12 .

(10) كل زمرة دوارة غير منتهية تملك مولداً واحداً .

(11) رتبة العنصر 7 في الزمرة $U(15)$ بالنسبة لعملية الضرب بالمقاس 15 تساوي 3 .

(12) $Z_{12} \cong Z_3 \oplus Z_4$.

السؤال الثاني (45 درجة): لتكن $(G , \cdot)$ زمرة ما ، علل صحة ما يلي:

(1) إذا كانت G تبديلية، فإن المجموعة $H = \{ x^2 \setminus x \in G\}$ تكون زمرة جزئية من G.

(2) إذا كانت G منتهية فإن مرتبة أي زمرة جزئية من G تقسم مرتبة الزمرة G.

(3) الزمرة الجزئية $Z(G)$ ناظمية في G حيث $Z(G)$ هو مركز الزمرة G.

(4) إذا كانت زمرة الخارج $G/_{Z(G)}$ دوارة ، فإن G تكون تبديلية.

(5) إذا كانت H زمرة جزئية ناظمية في G، فإن H تكون نواة لهومومورفيزم زمري غامر.

السؤال الثالث (19 درجة): لتكن G زمرة منتهية ، و P عدداً أولياً . متى نقول عن G إنها P– زمرة؟

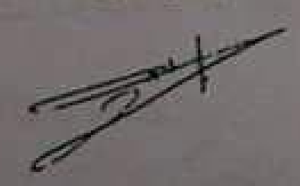
(1) إذا كانت G P– زمرة ، فإن كل زمرة جزئية في G تكون P- زمرة.

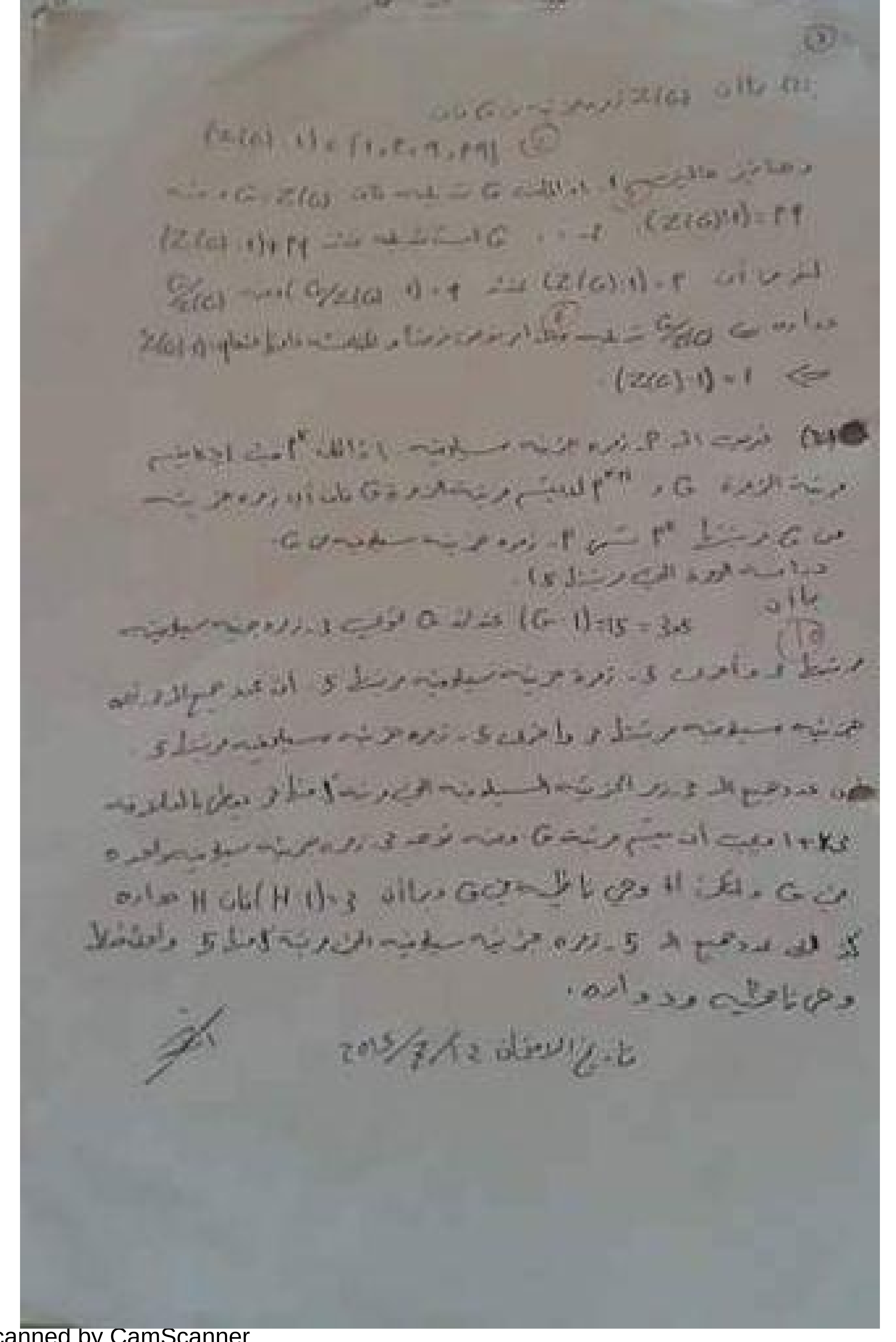
(2) إذا كانت زمرة جزئية ناظمية من G ، وكان كل من K وزمرة الخارج $G/_K$ P- زمرة ، فإن الزمرة G تكون P– زمرة .

2011 – 8 - 18

مع أطيب التمنيات بالنجاح

د. إيمان الخوجة





$(Z(G):1) \in \{1,3,9,27\}$

$(Z(G):1)=27$

$(Z(G):1)=3$

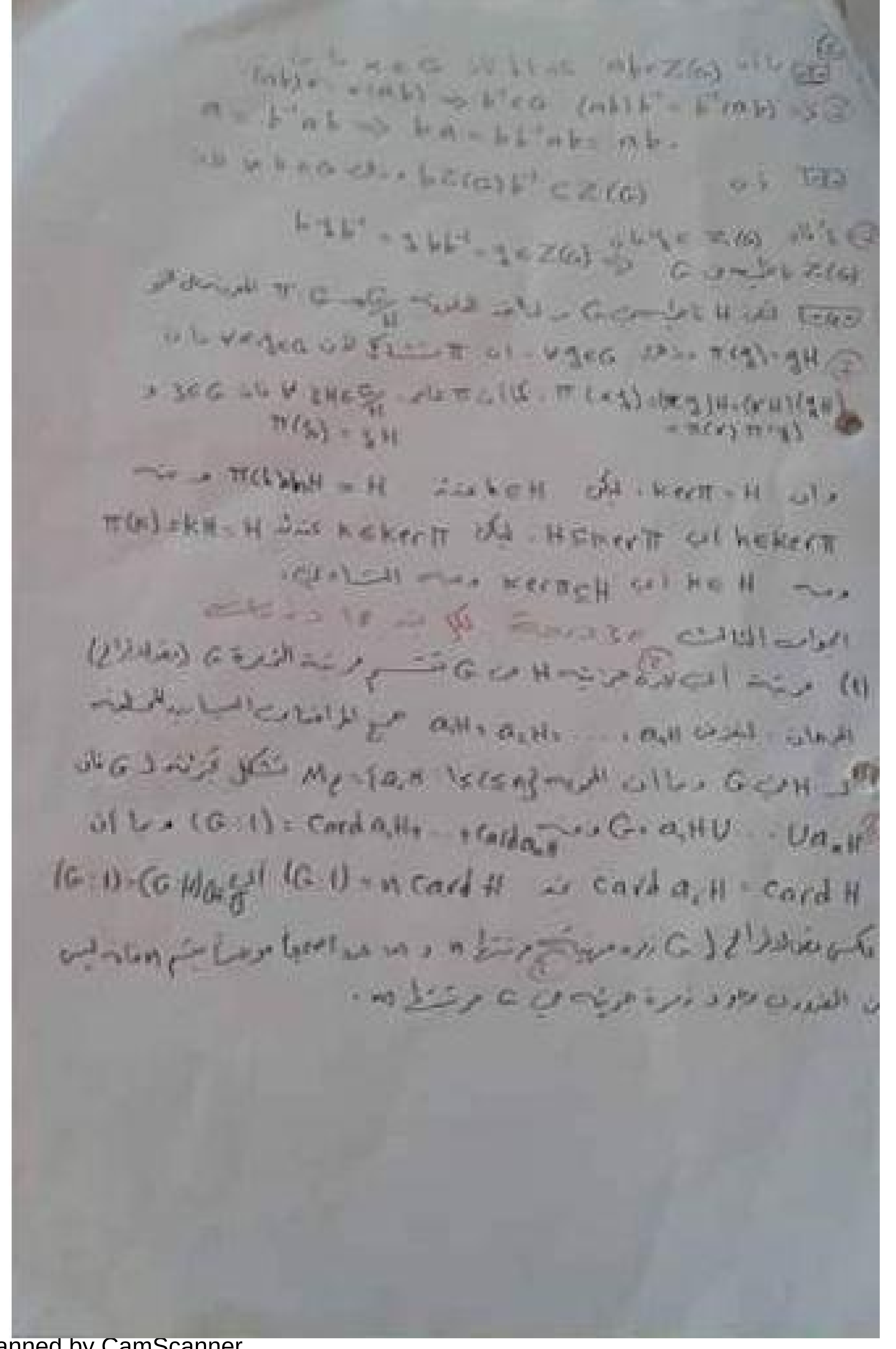
$(G/Z(G):1)=9$

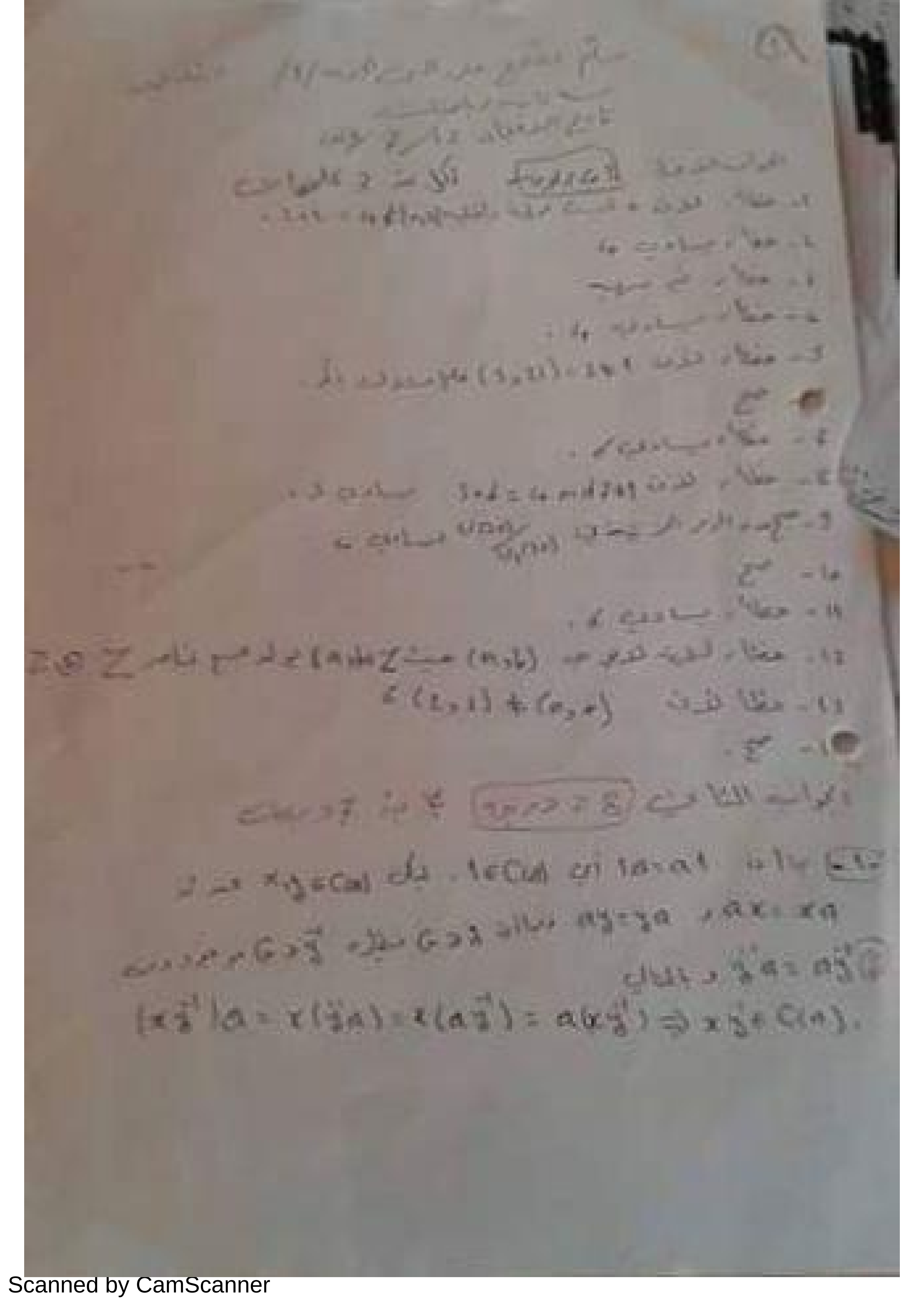
$(Z(G):1)=1$

$(G:1)=15=3\cdot 5$

$(H:1)=3$

تاريخ الإعلان 2/3/2015





سلم تصحيح مقرر الجبر ... /1/
سنة ثانية رياضيات 2012/2013

الجواب الأول [36 درجة] لكل سؤال 3 درجات

1) خطأ، $3\mathbb{Z} \cap 5\mathbb{Z} = 15\mathbb{Z}$.

2) خطأ، لأن $13 \times 5 = 2$، ومقلوب 13 هو 13،

3) خطأ، لأن $3(14+\langle 8\rangle)$ يساوي $2+\langle 8\rangle$ ولا يساوي $\langle 8\rangle$.

4) خطأ، عددها ثلاثة.

5) خطأ، عناصرها $\{H, 3H, 7H, 9H\}$.

6) خطأ، لأن كل زمرة مرتبتها عدد أولي تكون دوارة.

7) خطأ، عدد الزمر الجزئية في الزمرة $U(15)$ يساوي 3 زمر.

8) خطأ، و مولدها هو حقلها الأولي.

9) صح.

10) صح، عدد الهومومورفيزمات الزمرية من $\mathbb{Z}_{15}$ إلى $\mathbb{Z}_{30}$ يساوي 15.

11) خطأ، لأن $U(10)$ زمرة دوارة بينما $U(8)$ ليست دوارة.

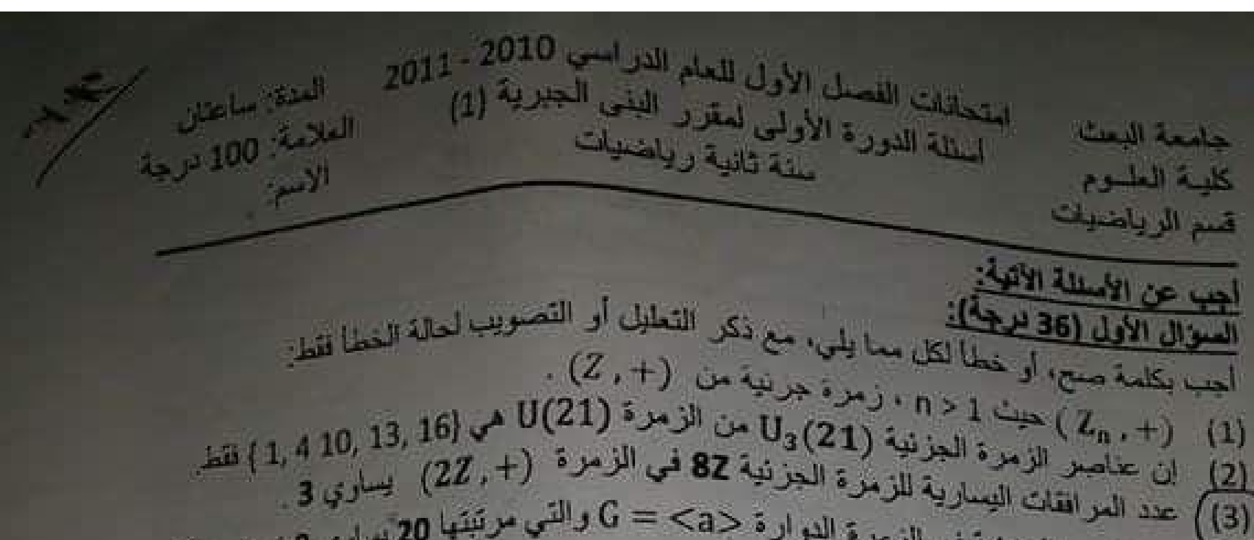
12) صح

الجواب الثاني [24 درجة] لكل طلب 6 درجات

1) بما أن $ex = xe$ أياً كان $x \in G$ نجد أن $e \in Z(G)$. ليكن $a, b \in Z(G)$
عندئذ أياً كان $x \in Z(G)$ بما أن $bx = xb$ وبالتالي $b^{-1}x = xb^{-1}$. كذلك بما أن $a \in Z(G)$
فإن $ab^{-1} = b^{-1}a$ ومنه

$$(ab^{-1})x = a(b^{-1}x) = a(xb^{-1}) = (xb^{-1})a = x(b^{-1}a) = x(ab^{-1})$$

وذلك أياً كان $x \in G$ ومنه $Z(G)$ زمرة جزئية من G.


جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحانات الفصل الأول للعام الدراسي 2010 - 2011
أسئلة الدورة الأولى لمقرر البنى الجبرية (1)
سنة ثانية رياضيات

المدة: ساعتان
العلامة: 100 درجة
الاسم:

أجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الأول (36 درجة):

أجب بكلمة صح، أو خطأ لكل مما يلي، مع ذكر التعليل أو التصويب لحالة الخطأ فقط:

(1) $(Z_n , +)$ حيث $n > 1$ ، زمرة جزئية من $(Z , +)$.

(2) إن عناصر الزمرة الجزئية $U_3(21)$ من الزمرة $U(21)$ هي $\{1, 4, 10, 13, 16\}$ فقط.

(3) عدد المرافقات اليسارية للزمرة الجزئية **8Z** في الزمرة $(2Z , +)$ يساوي **3** .

(4) عدد الزمر الجزئية في الزمرة الدوارة $G = <a>$ والتي مرتبتها **20** يساوي **8** زمر جزئية.

(5) $6Z \cap 3Z = 3Z$.

(6) الزمرة $Z_5 \oplus Z_3$ زمرة دوارة .

(7) عدد مولدات الزمرة الجمعية Z_8 يساوي **3** .

(8) رتبة زمرة الخارج $U(20)/U_5(20)$ تساوي **5** .

(9) عدد الهومومورفيزمات الزمرية من الزمرة Z_{20} إلى الزمرة Z_{10} يساوي **20** .

(10) أيا كان $k \in U(8)$ فإن $U(8) \neq <k>$ (الزمرة المولدة بـ k) .

(11) مرتبة العنصر (1,3) في الزمرة $Z_2 \oplus Z_4$ تساوي 2 .

(12) $Z_{27} \cong Z_3 \oplus Z_9$.

السؤال الثاني (30 درجة): لتكن $(G , \cdot)$ زمرة ما ، علل صحة ما يلي:

(1) إذا كان $a \in G$ ، فإن $<a> = <a^{-1}>$.

(2) إذا كان $a \in G$ مرتبته n ، وإذا وجد $k \in Z$ يحقق $a^k = e$ فإن n يقسم k.

(3) إذا كانت G منتهية مرتبتها عدد أولي فإنها تكون دوارة.

(4) إذا كانت H زمرة جزئية من G، وكان $(G:H) = 2$، فإن H ناظمية في G.

(5) كل زمرة جزئية ناظمية في G هي نواة لهومومورفيزم زمري غامر.

السؤال الثالث (24 درجة): لتكن G زمرة ما، ولتكن المجموعة $Z(G)=\{a\in G; ax=xa, \forall x\in G\}$.

(1) أثبت أن الزمرة الجزئية $Z(G)$ ناظمية في G .

(2) أثبت أنه إذا كانت زمرة الخارج $G/Z(G)$ دوارة، فإن الزمرة G تبديلية .

(3) إذا كانت **G** زمرة منتهية وغير تبديلية مرتبتها p^3 ، حيث **p** عدد أولي، فأثبت أنه إذا كان $Z(G) \neq <e>$ فإن $(Z(G) : 1) = p$.

السؤال الرابع (10 درجة): لتكن G زمرة منتهية رتبتها تقبل القسمة على العدد الأولي P .

اذكر نص عكس مبرهنة لاغرانج، ثم عرف الـ p- زمرة جزئية سيلوفية في G ، و ادرس الزمرة التي مرتبتها 15 ، وحدد الـ P- زمر جزئية سيلوفية فيها وهل G تحوي زمرة جزئية ناظمية، وضح ذلك.

2011 - 1 - 16

مع أطيب التمنيات بالنجاح

د. إيمان الخوجة

جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحانات الفصل الثاني للعام الدراسي 2009 - 2010
أسئلة الدورة الثانية لمقرر البنى الجبرية (1)
سنة ثانية رياضيات

المدة: ساعتان
العلامة: 80 درجة
الاسم:

أجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الأول (36 درجة):

أجب بكلمة صح، أو خطأ لكل مما يلي، مع ذكر التعليل أو التصويب لحالة الخطأ فقط:

(1) $5Z \cup 10Z$ زمرة جزئية في Z وتساوي الزمرة $10Z$.
(2) نظير العنصر 11 في الزمرة $U(14)$ هو 3.
(3) عدد المرافقات اليسارية للزمرة الجزئية $<6>$ من الزمرة Z_{18} يساوي 5.
(4) رتبة العنصر $(1,3)$ في الزمرة $Z_4 \oplus Z_2$ يساوي 3.
(5) عدد الزمر الجزئية في الزمرة Z_{15} يساوي 15 زمر جزئية.
(6) العنصر $(1,2)$ مولد للزمرة $Z_2 \oplus Z_3$.
(7) كل زمرة تبديلية هي زمرة دوارة.
(8) الزمرة $U(8)$ هي زمرة دوارة.
(9) عدد عناصر الزمرة الجزئية $< 20 >$ في الزمرة Z_{30} يساوي 5.
(10) عدد عناصر زمرة الخارج ${}^{< 10 >}/_{< 30 >}$ يساوي 10.
(11) العنصر 8 من زمرة اولر $U(21)$ هو أحد عناصر الزمرة الجزئية $U_3(21)$ منها.
(12) إن الزمرة الجزئية الوحيدة في Z_{30} والتي مرتبتها 10 هي الزمرة المولدة بالعنصر 10.

السؤال الثاني (20 درجة): لتكن $(G ,\cdot)$ زمرة. **علل صحة ما يلي:**

(1) إذا كانت G تبديلية، و H مجموعة كل العناصر x من G التي تحقق $x^n=e ; (n \in Z)$، فإن H زمرة جزئية من G.
(2) إذا كانت H زمرة جزئية دوارة من G، و $a \in G$، فإن الزمرة aHa^{-1} تكون دوارة أيضاً.
(3) إذا كانت H زمرة جزئية من G، وكان $(G:H) = 2$، فإن H ناظمية في G.
(4) إذا كانت ${}^{G}/_{Z(G)}$ زمرة دوارة حيث $Z(G)$ مركز الزمرة G، فإن الزمرة G تبديلية.

السؤال الثالث (8 درجات): إذا كان $n > 1$ عدداً صحيحاً، فإن ${}^{Z}/_{< n >} \approx Z_n$.

السؤال الرابع (16 درجة): لتكن G زمرة منتهية رتبتها تقبل القسمة على العدد الأولي P.

عرف الـ p- زمرة والـ p- زمرة جزئية سيلوفية في G، ثم أثبت ما يلي:

1- إذا كانت G p- زمرة، فإن كل زمرة جزئية من G هي p- زمرة.
2- ادرس الزمرة التي مرتبتها 40، وحدد الـ P-زمر جزئية سيلوفية فيها.

مع أطيب التمنيات
د. إيمان الخوجة

2010 - 6 - 6

كلية العلوم	للعام الدراسي 2009 - 2010	المدة: ساعتان
قسم الرياضيات	مقرر البنى الجبرية (1)	العلامة: 80 درجة
	سنة ثانية رياضيات	الاسم:

أجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الأول (36 درجة):

أجب بكلمة صح، أو خطأ لكل مما يلي، مع ذكر التعليل أو التصويب لحالة الخطأ فقط:

(1) $12Z \cup 6Z$ زمرة جزئية في Z وتساوي الزمرة $12Z$.

(2) مرتبة العنصر $<6> + 5$ في زمرة الخارج $Z_{18}/<6>$ تساوي 18 .

(3) عدد مرافقات الزمرة الجزئية المولدة بالعدد 2 في الزمرة الجمعية Z_{12} يساوي 2.

(4) رتبة العنصر 14 في الزمرة $U(15)$ بالنسبة لعملية الضرب بالمقاس 15 تساوي 3.

(5) عدد الزمر الجزئية في الزمرة الجمعية Z_{11} يساوي 11 زمرة جزئية.

(6) مرتبة الزمرة $Z_{15} \oplus Z_{12}$ تساوي 120 .

(7) كل زمرة دوارة غير منتهية لها 4 مولدات .

(8) نظير العنصر 11 في زمرة اولر $U(14)$ هو 3.

(9) جميع مولدات الزمرة الجمعية Z_8 هي 1 و 3 و 5.

(10) عدد عناصر زمرة الخارج $<4>/<20>$ تساوي 4.

(11) الزمرة الجزئية $H = <3>$ في الزمرة Z_{18} ليست ناظمية فيها.

(12) $4Z \cong U(10)$.

السؤال الثاني (20 درجة): علل صحة ما يلي:

(1) أيا كان العدد الصحيح s حيث $1 \leq s \leq n$ فإن $o(a^s) = o(a^{n-s})$ حيث $a \in G$.

(2) كل زمرة منتهية مرتبتها عدد أولي هي زمرة دوارة.

(3) إذا كانت H زمرة جزئية من G، وكان $(G:H) = 2$، فإن H ناظمية في G.

(4) إذا كانت $G/Z(G)$ زمرة دوارة، حيث $Z(G)$ مركز الزمرة G، فإن الزمرة G تبديلية.

السؤال الثالث (12 درجة): ليكن $f : G \to G'$ هومومورفيزماً زمرياً:

(1) أثبت أن كل زمرة جزئية ناظمية في G هي نواة لهومومورفيزم زمري غامر.

(2) أثبت أن $G/\ker f \cong \mathrm{Im}\, f$.

السؤال الرابع (12 درجة): لتكن G زمرة منتهية رتبتها تقبل القسمة على العدد الأولي p .

عرف الـ p- زمرة والـ p- زمرة جزئية سيلوفية في G، ثم أثبت ما يلي:

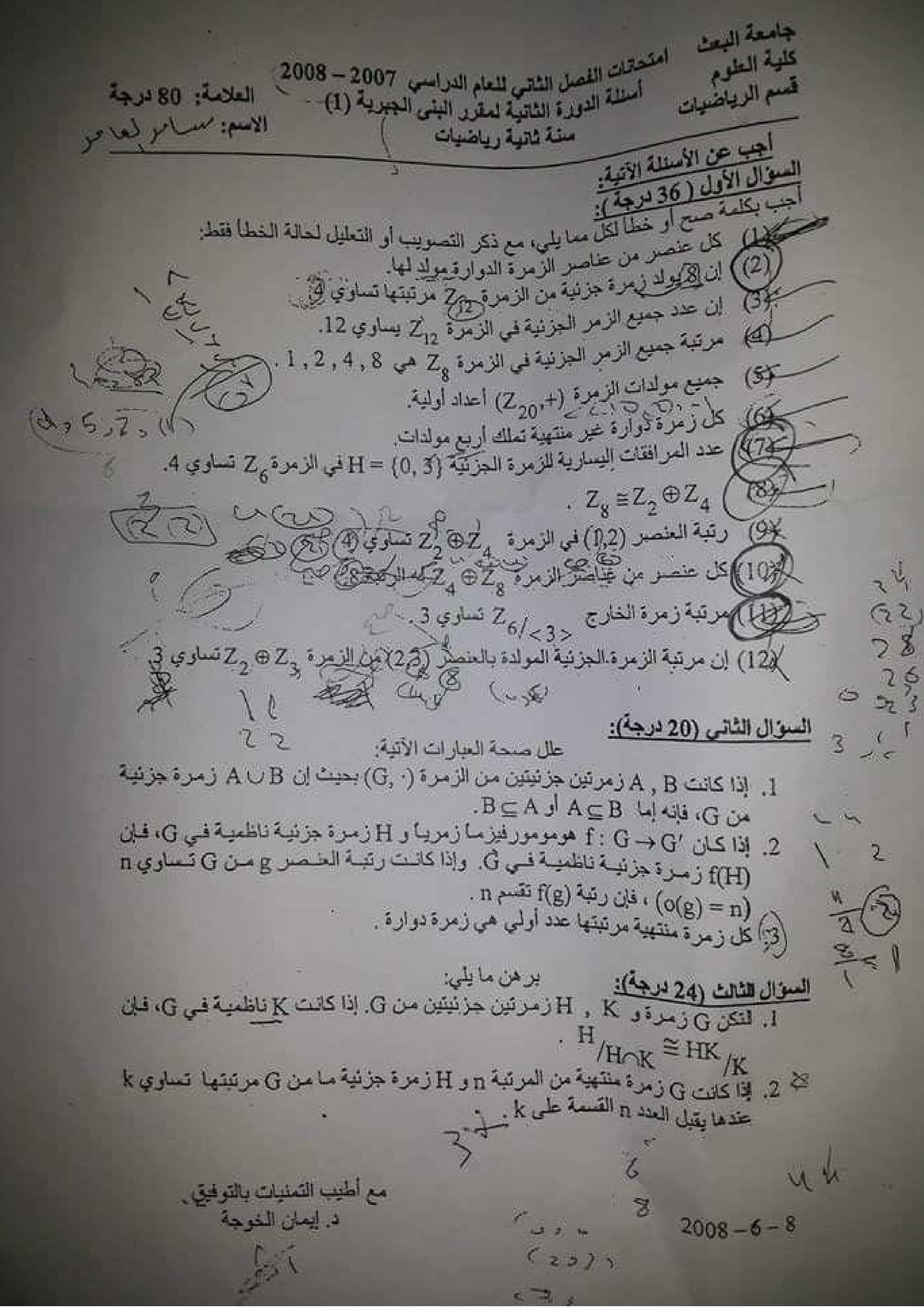
(1) إذا كانت G p- زمرة، فإن كل زمرة جزئية من G هي p- زمرة.

(2) ادرس الزمرة التي مرتبتها 40 ، وحدد الـ p-زمر جزئية سيلوفية فيها.

2010 - 9 - 1

مع أطيب التمنيات بالنجاح

د. إيمان الخوجة



جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحانات الفصل الثاني للعام الدراسي 2007 – 2008
أسئلة الدورة الثانية لمقرر البنى الجبرية (1)
سنة ثانية رياضيات

العلامة: 80 درجة
الاسم:

أجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الأول (36 درجة):

أجب بكلمة صح أو خطأ لكل مما يلي، مع ذكر التصويب أو التعليل لحالة الخطأ فقط:

(1) كل عنصر من عناصر الزمرة الدوارة مولد لها.
(2) إن 8 يولد زمرة جزئية من الزمرة Z_{12} مرتبتها تساوي 4.
(3) إن عدد جميع الزمر الجزئية في الزمرة Z_{12} يساوي 12.
(4) مرتبة جميع الزمر الجزئية في الزمرة Z_8 هي $1, 2, 4, 8$.
(5) جميع مولدات الزمرة $(Z_{20},+)$ أعداد أولية.
(6) كل زمرة دوارة غير منتهية تملك أربع مولدات.
(7) عدد المرافقات اليسارية للزمرة الجزئية $H=\{0,3\}$ في الزمرة Z_6 تساوي 4.
(8) $Z_8 \cong Z_2 \oplus Z_4$.
(9) رتبة العنصر $(1,2)$ في الزمرة $Z_2 \oplus Z_4$ تساوي 4.
(10) كل عنصر من عناصر الزمرة $Z_4 \oplus Z_8$ له الرتبة 8.
(11) مرتبة زمرة الخارج $Z_6/\langle 3\rangle$ تساوي 3.
(12) إن مرتبة الزمرة الجزئية المولدة بالعنصر $(2,2)$ من الزمرة $Z_2 \oplus Z_3$ تساوي 3.

السؤال الثاني (20 درجة):

علل صحة العبارات الآتية:

1. إذا كانت A , B زمرتين جزئيتين من الزمرة $(G,\cdot)$ بحيث إن $A \cup B$ زمرة جزئية من G، فإنه إما $A \subseteq B$ أو $B \subseteq A$.
2. إذا كان $f: G \to G'$ هومومورفيزما زمريا و H زمرة جزئية ناظمية في G، فإن $f(H)$ زمرة جزئية ناظمية في G'. وإذا كانت رتبة العنصر g من G تساوي n $(o(g)=n)$، فإن رتبة $f(g)$ تقسم n.
3. كل زمرة منتهية مرتبتها عدد أولي هي زمرة دوارة.

السؤال الثالث (24 درجة):

برهن ما يلي:

1. لتكن G زمرة و K , H زمرتين جزئيتين من G. إذا كانت K ناظمية في G، فإن $H/_{H\cap K} \cong HK/_K$.
2. إذا كانت G زمرة منتهية من المرتبة n و H زمرة جزئية ما من G مرتبتها تساوي k عندها يقبل العدد n القسمة على k.

مع أطيب التمنيات بالتوفيق.
د. إيمان الخوجة

2008 – 6 – 8

حل الدورة الأولى 2014 - 2015

بنى جبرية 1

١ - خطأ العملية (.) ليست داخلية

أي ∉ {1, 2, 3, 4} لأنه

$\cdot_{mod\,5}$	1	2	3
1	1	2	3
2	2	(4)	1
3	3	2	4

2 - خطأ (2)

$U_{20} = \{1, 3, 7, 9, 11, 13, 17, 19\}$

$U_5(20) = \{1, 11\}$

3 - خطأ

$O(-1) = 2$

٤ - خطأ (0) يولد جميع عناصرها وهو عنصر أي

5 - خطأ عدد مولدين a, a^{-1}

6 - خطأ يساوي 5

7 - خطأ يساوي 4 $U_{11} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

8 - صح

9 - خطأ $\varphi^{-1}(6) = 23 + \ker f$

١٠ - خطأ يساوي ١٠ (لم نذكره في تعريف ماتيه)

١١ - خطأ لأنه $\gcd(5, 20) \neq 1$

١٢ - خطأ يساوي 4

13 - خطأ يساوي 12

١٤ - صح

حول دورة 2014 - 2015
الدورة الثانية
جبر 1

١- خطأ لأن العملية (+) ليست عملية داخلية $2+2=4\notin\{0,2\}$

٢- خطأ ٤ عناصر : $U_{20}=\{1,3,7,9,11,13,17,19\}$
بالي شرح (1) $U_{4}(20)=\{1,9,13,17\}$

٣- خطأ غير ضربية

٤- خطأ يساوي ٤

٥- خطأ $\gcd(3,21)=3\neq1$ ليس شرط لاوي

٦- صح

٧- خطأ عدد الضارية $<6>=\{6,12,18,24,0\}$ عناصر

$Z_{30}=\{0,1,2,\ldots,29\}$

$0+<6>=<6>$ $1+<6>=\{7,13,19,25,1\}$

$2+<6>=\{8,14,20,26,2\}$ $3+<6>=\{9,15,21,27,3\}$

$4+<6>=\ldots$ $5+<6>=\ldots$

$6+<6>=$ مكرر فقط

٨- خطأ يساوي 5

mod 7	1	2	3	4	5	6
3	3	6	2	5	①	4

$U_7=\{1,2,3,4,5,6\}$

٩- صح

١٠- صح

١١- خطأ يساوي 6 $\gcd(12,30)=2\times3=6$

30	2
15	3
5	5
1	

12	2
6	2
3	3
1	

12- خطأ لا يوجد (a,b) $a,b\in Z$ ذلك مع عناصر $Z\oplus Z$

$6(2,3)\neq(0,0)$

13-

14- صح

مقرر الجبر (1)
السنة الثانية رياضيات 2012/2013

الجواب الأول: 36 درجة، لكل سؤال 3 درجات

1) خطأ، $3\mathbb{Z} \cap 5\mathbb{Z} = 15\mathbb{Z}$.

2) خطأ، لأن $13 \times 5 = 2$، أي ظل 13 هو 13.

3) خطأ، لأن $3(14 + \langle 8 \rangle)$ يساوي $\langle 8 \rangle + 2$ ولا يساوي $\langle 8 \rangle$.

4) خطأ، عددها ثلاثة.

5) خطأ، عناصرها هي $\{H, 3H, 7H, 9H\}$.

6) خطأ، لأن كل زمرة مرتبتها عدد أولي تكون دوارة.

7) خطأ، عدد الزمر الجزئية في الزمرة $U(10)$ يساوي 3 زمر.

8) خطأ، و مولداتها هو ليس أولياً.

9) صح.

10) صح، عدد الهومومورفيزمات الزمرية من $\mathbb{Z}_{15}$ إلى $\mathbb{Z}_{30}$ يساوي 15.

11) خطأ، لأن $U(10)$ زمرة دوارة بينما $U(8)$ ليست دوارة.

12) صح

الجواب الثاني: 24 درجة، لكل طلب 6 درجات

1) بما أن $ex = xe$ أياً كان $x \in G$ نجد أن $e \in Z(G)$. ليكن $a, b \in Z(G)$ عندئذ أياً كان $x \in Z(G)$ فإن $bx = xb$ وبالتالي $b^{-1}x = xb^{-1}$. كذلك بما أن $\in Z(G)$ فإن $ab^{-1} = b^{-1}a$ ومنه

$$(ab^{-1})x = a(b^{-1}x) = a(xb^{-1}) = (xb^{-1})a = x(b^{-1}a) = x(ab^{-1})$$

وذلك أياً كان $x \in G$ ومنه $Z(G)$ زمرة جزئية من G.

جامعة البعث	امتحانات الدورة الثالثة للعام الدراسي 2011 - 2012	المدة: ساعتان
كلية العلوم	مقرر البنى الجبرية 1	العلامة: 100 درجة
قسم الرياضيات	سنة ثانية رياضيات	الاسم:

أجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الأول (36 درجة):

أجب بكلمة صح، أو خطأ لكل مما يلي، مع ذكر التعليل أو التصويب لحالة الخطأ فقط:

(1) $(4Z,+)$ زمرة جزئية من الزمرة $(16Z,+)$.

(2) إن عناصر الزمرة الجزئية $U_5(20)$ من الزمرة $U(20)$ هي $\{1, 11, 17\}$.

(3) عدد المرافقات اليسارية للزمرة الجزئية $H = \{1, 11\}$ في الزمرة $U(30)$ يساوي **3** .

(4) عدد الزمر الجزئية في الزمرة الدوارة $G = <a>$ والتي مرتبتها **15** يساوي **5** زمر جزئية.

(5) $5Z \cap 3Z = 8Z$.

(6) الزمرة $Z_5 \oplus Z_3$ زمرة دوارة .

(7) جميع مولدات الزمرة الجمعية Z_{10} التي لا تساوي **1** هي أعداد أولية.

(8) رتبة أي عنصر مغاير للصفر في زمرة الأعداد الصحيحة Z غير منتهية .

(9) إن زمرة اولر $U(8)$ هي زمرة دوارة .

(10) كل زمرة دوارة غير منتهية تملك مولدين .

(11) $Z_{12} \cong Z_3 \oplus Z_4$.

(12) عدد عناصر زمرة الخارج $<20> / <4>$ تساوي 4 .

السؤال الثاني (40 درجة): لتكن $(G,\cdot)$ زمرة ما ، علل صحة ما يلي:

(1) إذا كانت H مجموعة جزئية من G تحقق أن $a.b \in H$ مهما يكن $a, b \in H$ فإن H تكون زمرة جزئية من G .

(2) إذا كانت G منتهية فإن مرتبة أي زمرة جزئية H من G تقسم مرتبة الزمرة G.

(3) إذا كان $a \in G$ مرتبته n ، وإذا وجد $k \in Z$ يحقق $a^k = e$ ، فإن n يقسم k .

(4) إذا كانت G دوارة وغير منتهية، فإنها تكون ايزومورفية (تماثل) مع زمرة الأعداد الصحيحة Z.

(5) إذا كانت G عبارة عن p- زمرة، فإن كل زمرة جزئية من G هي p- زمرة، حيث p عدد أولي.

السؤال الثالث (24 درجة): لتكن G زمرة ما، ولتكن $Z(G) = \{a \in G \setminus ax=xa, \forall x \in G\}$ مركز الزمرة G .

(1) أثبت أن الزمرة الجزئية $Z(G)$ ناظمية في G .

(2) أثبت أنه إذا كانت زمرة الخارج $G/Z(G)$ دوارة، فإن الزمرة G تكون تبديلية .

(3) إذا كانت G زمرة منتهية وغير تبديلية مرتبتها P^3 ، حيث P عدد أولي، فأثبت أنه إذا كان $Z(G) \neq <e>$ فإن $(Z(G) : e) = P$ حيث e هو حيادي الزمرة G .

2012 – 9 – 12

مع أطيب التمنيات بالنجاح

د. إيمان الخوجة

جامعة البعث	امتحان الدورة الأولى لمقرر البنى الجبرية (1)	المدة: ساعتان
كلية العلوم	العام الدراسي 2011 - 2012	العلامة: 100 درجة
قسم الرياضيات	سنة ثانية رياضيات	الاسم:

أجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الأول (36 درجة):

أجب بكلمة صح، أو خطأ لكل مما يلي، مع ذكر التعليل أو التصويب لحالة الخطأ فقط:

(1) إن $(Z_6 \,,\, \cdot)$ زمرة .

(2) إن نظير العنصر 4 في زمرة اولر $U(21)$ هو 13 .

(3) إن $3Z \cup 5Z = 8Z$.

(4) عدد المرافقات اليسارية للزمرة الجزئية $H = <6> = \{0, 6,12\}$ في الزمرة Z_{18} يساوي **3** .

(5) عدد عناصر الزمرة الجزئية $U_4(20)$ من الزمرة $U(20)$ يساوي 5 .

(6) مرتبة العنصر $< 6 > +5$ في الزمرة $Z_{18}/_{< 6 >}$ تساوي 5 .

(7) عدد الزمر الجزئية في الزمرة $U(10)$ يساوي 4 زمر جزئية فقط.

(8) جميع مولدات الزمرة الجمعية Z_8 التي لا تساوي **1** هي أعداد أولية.

(9) أي زمرة دوارة ومنتهية تكون ايزومورفية (تماثل) مع Z .

(10) عدد الهومومورفيزمات الزمرية من الزمرة Z_{12} إلى الزمرة Z_{30} يساوي 30 .

(11) رتبة العنصر 7 في الزمرة $U(15)$ بالنسبة لعملية الضرب بالمقاس 15 تساوي 3 .

(12) عدد عناصر زمرة الخارج $<4>/_{< 20 >}$ تساوي 4 .

السؤال الثاني (40 درجة): لتكن $(G, \cdot)$ زمرة ما ، علل صحة ما يلي:

(1) إذا كانت G تبديلية فإن المجموعة $H = \{x^2 ;\ x \in G\}$ هي زمرة جزئية في G.

(2) إذا كانت G منتهية فإن مرتبة أي زمرة جزئية H من G تقسم مرتبة الزمرة G.

(3) كل زمرة دوارة هي زمرة تبديلية .

(4) إذا كانت زمرة الخارج $G/_{Z(G)}$ دوارة حيث $Z(G)$ مركز الزمرة G، فإن G تكون تبديلية.

(5) إذا كانت H زمرة جزئية في G تحقق $(G : H) = 2$ ، فإن H تكون ناظميه في G .

السؤال الثالث (24 درجة): لتكن G زمرة ما .

(1) أثبت أن كل زمرة جزئية ناظميه في الزمرة G هي نواة لهومومورفيزم زمري غامر.

(2) إذا كان $f: G \to G'$ هومومورفيزما زمرياً ، فإن $G/_{Ker\, f} \approx Im\, f$.

(3) استنتج أنه إذا كان n>1 عدداً صحيحاً، فإن $Z/_{<n>} \approx Z_n$.

2012 - 7 - 25

مع أطيب التمنيات بالنجاح

د. إيمان الخوجة

لكل عناصر الزمرة $xH \in G/H$ فإن $x \in G$ وبالتالي

$\pi(x)$، لنبرهن أن $\text{Ker}\,\pi = H$. ليكن $h \in H$ عندئذ

$\pi(h) = hH = H$ ومنه $h \in \text{Ker}\,\pi$، أي $H \subseteq \text{Ker}\,\pi$. ليكن $k \in \text{Ker}\,\pi$ عندئذ

$\pi(k) = kH = H$ ومنه $k \in H$ وبالتالي $\text{Ker}\,\pi \subseteq H$ ومنه $\text{Ker}\,\pi = H$.

(3) ليكن $A = \langle a \rangle$ حيث $a \in A$. ليكن T زمرة جزئية من A عندئذ T زمرة جزئية في G دوارة. لنفرض أن $T = \langle a^m \rangle$ ولنبرهن أن $gTg^{-1} \subseteq T$

من أجل أي $g \in G$ ليكن $z \in gTg^{-1}$ عندئذ يوجد $(a^m)^k \in T$ بحيث $z = g(a^m)^k g^{-1}$

ومنه بما أن الزمرة الجزئية A ناظمية في G فإن $(gag^{-1})^k = ga^kg^{-1} \in A$ وبالتالي

$ga^kg^{-1} = a^s$ حيث $s \in \mathbb{Z}$، وهذا يبين لنا أن

$$z = g(a^m)^k g^{-1} = g(a^k)^m g^{-1} = [(gag^{-1})^k]^m = (a^s)^m = (a^m)^s \in T$$

ومنه T ناظمية في G.

(4) لنفرض أن $(\frac{G}{K}:1) = p^r$ وأن $(K:1) = p^s$ حيث

$$(G:K) = (\frac{G}{K}:1) = p^r$$

ومنه وحسب لاغرانج فإن

$$(G:1) = (G:K)(K:1) = p^r p^s = p^{r+s}$$

ومنه G زمرة-p.

لنفرض أن مرتبة G تساوي m عندئذ

$$G = \{e, a, a^2, \dots, a^{m-1}\}$$

و m أصغر عدد صحيح موجب من أجله $e = a^m$ وهذا يبين أنه

$$m = o(a) = n$$

(3) لتكن G زمرة دوارة مولدة بالعنصر $a \in G$ وليكن $x, y \in \langle a \rangle$

عندئذ يوجد $n, m \in \mathbb{Z}$ حيث $x = a^n, y = a^m$ ومنه

$$x \cdot y = a^n \cdot a^m = a^{n+m} = a^{m+n} = a^m a^n = yx$$

(4) كل زمرة دوارة وليد منتهية تكون إيزومورفية مع $\mathbb{Z}$ ومنه

فإن جميع الزمر الدوارة غير المنتهية إيزومورفية مع بعضها.

الجواب الثالث (40 درجة) لكل طلب 10 درجات

(1) لنفرض أن $a_1H, a_2H, \dots, a_nH$ جميع المرافقات اليسارية المختلفة للزمرة

الجزئية H في G. وبما أن المجموعة $M_\rho = \{a_iH ;\ 1 \le i \le n\}$

تشكل تجزئة للزمرة G فإن $G = a_1H \cup a_2H \cup \dots \cup a_nH$ ومنه

$$(G:1) = \text{card}\, a_1H + \text{card}\, a_2H + \dots + \text{card}\, a_nH$$

وبما أن $\text{card}\, a_iH = \text{card}\, H$ نجد $(G:1) = n\, \text{card}\, H$ أي أن

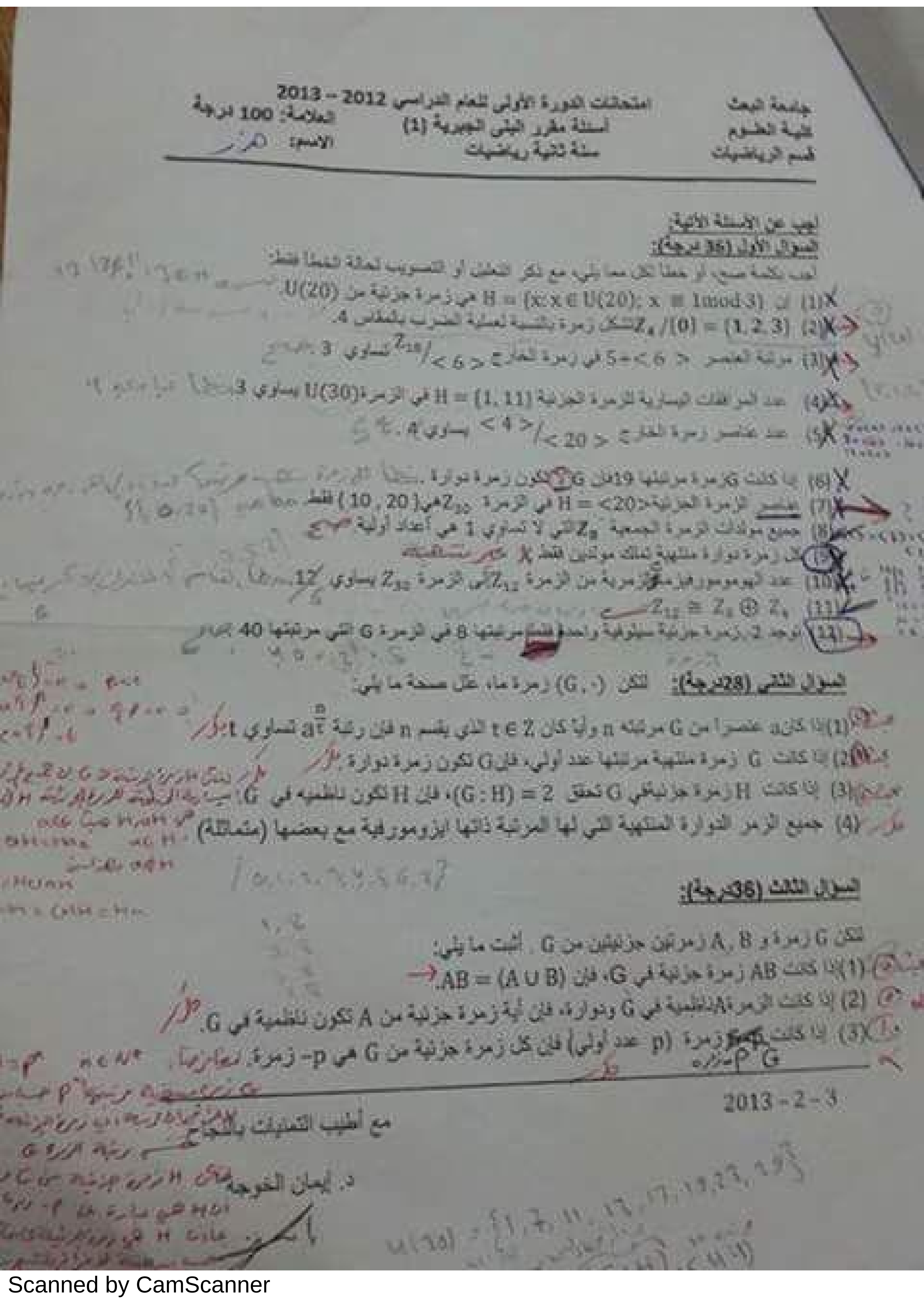
$$(G:1) = (G:H)(H:1)$$

(2) لتكن H زمرة جزئية ناظمية في G. ولنأخذ العلاقة $\pi : G \to G/H$

المعرفة بالشكل: لكل $g \in G$ فإن $\pi(g) = gH$. واضح أن H هومومورفيزم

لأنه لكل $g_1, g_2 \in G$ فإن

$$\pi(g_1 g_2) = (g_1 g_2)H = (g_1H)(g_2H) = \pi(g_1)\pi(g_2)$$



جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحانات الدورة الأولى للعام الدراسي 2012 – 2013
أسئلة مقرر البنى الجبرية (1)
سنة ثانية رياضيات

العلامة: 100 درجة
الاسم:

أجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الأول (36 درجة):

أجب بكلمة صح أو خطأ لكل مما يلي مع ذكر التعليل أو التصويب لحالة الخطأ فقط.

(1) إن $H = \{x : x \in U(20);\ x \equiv 1 \bmod 3\}$ هي زمرة جزئية من $U(20)$.
(2) $Z_4 / \{0\} = \{1, 2, 3\}$ تشكل زمرة بالنسبة لعملية الضرب بالمقياس 4.
(3) مرتبة العنصر $<6> + 5$ في زمرة الخارج $Z_{18}/<6>$ تساوي 3.
(4) عدد المرافقات اليسارية للزمرة الجزئية $H = \{1, 11\}$ في الزمرة $U(30)$ يساوي 3.
(5) عدد عناصر زمرة الخارج $<4>/<20>$ يساوي 4.
(6) إذا كانت G زمرة مرتبتها 19 فإن G لا تكون زمرة دوارة.
(7) عناصر الزمرة الجزئية $H = <20>$ في الزمرة Z_{30} هي $\{10, 20\}$ فقط.
(8) جميع مولدات الزمرة الجمعية Z_8 التي لا تساوي 1 هي أعداد أولية.
(9) كل زمرة دوارة منتهية تملك مولدين فقط.
(10) عدد الهومومورفيزمات الزمرية من الزمرة Z_{12} إلى الزمرة Z_{30} يساوي 12.
(11) $Z_{12} \cong Z_3 \oplus Z_4$
(12) توجد زمرة جزئية سيلوفية واحدة فقط مرتبتها 8 في الزمرة G التي مرتبتها 40.

السؤال الثاني (28 درجة): لتكن $(G, \cdot)$ زمرة ما، علل صحة ما يلي:

(1) إذا كان a عنصراً من G مرتبته n وليكن $t \in Z$ الذي يقسم n فإن رتبة $a^{\frac{n}{t}}$ تساوي t.
(2) إذا كانت G زمرة منتهية مرتبتها عدد أولي، فإن G تكون زمرة دوارة.
(3) إذا كانت H زمرة جزئية في G تحقق $(G : H) = 2$، فإن H تكون ناظمية في G.
(4) جميع الزمر الدوارة المنتهية التي لها المرتبة ذاتها ايزومورفية مع بعضها (متماثلة).

السؤال الثالث (36 درجة):

لتكن G زمرة و A, B زمرتين جزئيتين من G. أثبت ما يلي:

(1) إذا كانت AB زمرة جزئية في G، فإن $AB = (A \cup B)$.
(2) إذا كانت الزمرة A ناظمية في G ودوارة، فإن أية زمرة جزئية من A تكون ناظمية في G.
(3) إذا كانت G p- زمرة (p عدد أولي) فإن كل زمرة جزئية من G هي p- زمرة.

2013 - 2 - 3

مع أطيب التمنيات بالنجاح

د. إيمان الخوجة

جامعة البعث كلية العلوم قسم الرياضيات	امتحانات الدورة التكميلية للعام الدراسي 2014 - 2015 أسئلة مقرر البنى الجبرية (1) سنة ثانية رياضيات	المدة: ساعة ونصف العلامة: 100 درجة الاسم:

أجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الأول (48 درجة):

أجب بكلمة صح، أو خطأ لكل مما يلي، مع ذكر التعليل أو التصويب لحالة الخطأ فقط:

(1) إن المجموعة $\{0, 2, 4\}$ هي زمرة جزئية من الزمرة Z_8 .

(2) إن عدد العناصر التي كل منها يولد الزمرة الدوارة $G=<a>$ التي مرتبتها العدد الأولي p يساوي p.

(3) مرتبة العنصر (i) في الزمرة $(C^*, \cdot)$ غير منتهية ، حيث C^* الأعداد العقدية المغايرة للصفر.

(4) رتبة الزمرة الجزئية المولدة بالعنصر 5 من الزمرة $(Z_7 , +)$ تساوي 5 .

(5) جميع مولدات الزمرة $(Z_{12} , +)$ أعداد أولية .

(6) عدد المرافقات اليسارية للزمرة الجزئية $10Z$ في الزمرة $2Z$ يساوي 10 .

(7) إن العنصر a^7 مولد للزمرة الدوارة $G = < a >$ والتي مرتبتها 91 .

(8) إذا كانت $(G, \cdot)$ زمرة و $a \in G$ عنصراً مرتبته 12 فإن مرتبة العنصر a^8 في G تساوي 6.

(9) إن عناصر الزمرتين الجزئيتين $<3>$ ، $<7>$ في الزمرة $U(20)$ هو نفسه.

(10) إن مركز الزمرة $(R/\{0\} , \cdot)$ يساوي 1 حيث R مجموعة الأعداد الحقيقية.

(11) إن عدد عناصر زمرة الخارج $U(20)/U_5(20)$ يساوي 5 .

(12) إذا كان $\varphi: U(40) \to U(40)$ تشاكلا و $Ker\,\varphi = \{1, 9, 17, 33\}$ و $\varphi(11) = 11$ فإن $\varphi^{-1}(11) = 11 + \ker\varphi$.

(13) إن رتبة العنصر $(2 , 2)$ من الزمرة $Z_4 \oplus Z_3$ يساوي 12 .

(14) عدد الهومومورفيزمات (التشاكلات) الزمرية من الزمرة Z_{20} إلى الزمرة Z_8 يساوي 40.

(15) إن $U(10) \cong Z_2 \oplus Z_2$.

(16) إذا كانت G زمرة منتهية مرتبتها تقبل القسمة على 3 فإن الزمرة التي مرتبتها 81 هي 3- زمرة جزئية سيلوفية في G.

السؤال الثاني (52 درجة): لتكن $(G , \cdot)$ زمرة ما و $Z(G)$ مركز الزمرة G، علل صحة ما يلي:

(1) إن المجموعة $Z(G) = \{a : a \in G; ax = xa , \forall x \in G \}$ هي زمرة جزئية من G.

(2) إذا كان $a , b \in G$ بحيث $a \cdot b \in Z(G)$ فإن $a . b = b . a$.

(3) الزمرة الجزئية $Z(G)$ ناظمية في G .

(4) إذا كانت G منتهية وغير تبديلية مرتبتها p^3 حيث p عدد أولي وكان $Z(G) \neq <e>$، فإن $(Z(G) : 1) = p$.

(5) إذا كانت G منتهية فاثبت أن مرتبة أية زمرة جزئية K من G تقسم مرتبة الزمرة G.

(6) إذا كانت G منتهية و p- زمرة (p عدد أولي) فإن كلاً من $Z(G)$ و $G/Z(G)$ هي p- زمرة.

2015 - 9 - 1

مع أطيب التمنيات بالنجاح

د. إيمان الخوجة



1

سلم تصحيح مقرر الزمر الجبرية /٢/

الدورة التكميلية للعام الدراسي 2015-2016

س٤ رياضيات

السؤال الأول (32 درجة) لكل بند 2 درجات

1) خطأ، مثلاً $\{0,2,4\}$ $2+4=6 \notin$.

2) خطأ، يساوي $p-1$.

3) خطأ، يساوي 4 .

4) خطأ، $\langle 5 \rangle = Z_6$

5) خطأ، 1 مولد وحيد لها.

6) خطأ، يساوي 5 .

7) خطأ، مثلاً $1 \neq (7, 91)$.

8) خطأ، يساوي e مثلاً $e = a^{24} = (a^8)^3$

9) صح.

10) خطأ، يساوي $R \setminus \{0\}$.

11) خطأ، يساوي 4 .

12) خطأ، يساوي $4 \in \mathbb{N}$ ، $C_G(11) = 11$

13) خطأ، يساوي 6 .

14) خطأ، يساوي 4 .

15) خطأ، $U(10) \cong Z_4$.

16) صح.

السؤال الثاني (52 درجة)

(1) بما أن $ex = xe$ مهما يكن $x \in G$ ، فإن $e \in Z(G)$. ليكن $a, b \in Z(G)$

(3) عندئذٍ أياً كان $x \in G$ فإن $bx = xb$ ومنه $xb^{-1} = b^{-1}x$ كذلك بما أن

$a \in Z(G)$ فإن $ab^{-1} = b^{-1}a$ ومنه

$(xb^{-1})a = x(b^{-1}a) = x(ab^{-1})$

ومنه $\forall x \in G$ ومنه (G)

1) $\forall x \in G$ فإن $x(ab)$

$(ab)b^{-1} = b^{-1}(ab)$ ومنه $x = b^{-1}$

$a = b^{-1}ab \Rightarrow ba = ab$

2) البرهان $bZ(G)b^{-1} \subset Z(G)$ ومنه $\forall b \in G$

لتكن $x \in bZ(G)b^{-1}$ عنصر $y \in Z(G)$ حيث

$x = byb^{-1} = ybb^{-1} = y \in Z(G)$ ومنه $Z(G)$ ناظمية في (G)

3) ... رتبة $Z(G)$ ... $(Z(G):1) \in \{1, p, p^2\}$

ويكون ... $Z(G) \neq \{e\}$ فإن $(Z(G):1) \neq 1$ ... G

... فإن $(Z(G):1) \neq p^2$ ... $Z(G)$ ... G

فإن $p = \frac{p^2}{p^2} = \frac{(G:1)}{(Z(G):1)} = (G/Z(G):1)$ أي $\frac{G}{Z(G)}$ دائرية

ومنه G ... $(Z(G):1) \neq p^2$

ومنه $(Z(G):1) = p$

4) ... $a_1H, a_2H, \dots, a_nH$ المرافقات ... H في G

... $M_p = \{a_iH, \dots\}$ ... $G = a_iH \cup \dots$

... $(G:1) = \mathrm{card}\,a_iH$ ... $\mathrm{card}\,H$ ... $\mathrm{card}\,H = (H:1)$

5) ... $Z(G)$ ... G ... p ... $Z(G) \neq$

إذا $a \in Z(G)$ فإن $ab^{-1} = b^{-1}a$ ومنه

$(ab^{-1})x = a(b^{-1}x) = a(xb^{-1}) = (xb^{-1})a = x(b^{-1}a) = x(ab^{-1})$

ومنه $\forall x \in G$ ومنه $Z(G)$ زمرة جزئية من G

(2) $\forall x \in G$ فإن $(ab)x = x(ab)$

نأخذ $x = b^{-1}$ ومنه $(ab)b^{-1} = b^{-1}(ab)$ ومنه

$a = b^{-1}ab \Rightarrow ba = ab$

(3) لنثبت أن $bZ(G)b^{-1} \subset Z(G)$ من أجل $\forall b \in G$

ليكن $x \in bZ(G)b^{-1}$ [illegible] $y \in Z(G)$ حيث

$x = byb^{-1} = ybb^{-1} = y \in Z(G)$ ومنه $Z(G)$ ناظمية في G

(4) [illegible] $Z(G)$ [illegible] p^2 [illegible] $Z(G) = \{e\}$

ويكون [illegible] $Z(G) \neq \{e\}$ لأن $(Z(G):1) \neq 1$ [illegible]

[illegible] $(Z(G):1) \neq p^2$ [illegible] $Z(G)$ [illegible]

فإن p [illegible] $\left(G/Z(G) : 1\right) = \frac{(G:1)}{(Z(G):1)} = \frac{p^2}{p} = p$ أي أن $\frac{G}{Z(G)}$ دائرية

ومنه G تبديلية وهذا تناقض لأن $(Z(G):1) \neq p^2$

ومنه $(Z(G):1) = p$

(5) لتكن $a_1H, a_2H, \dots$ الأصناف اليسارية المختلفة لـ H

[illegible] $M_\ell = \{a_1H, \dots\}$ تشكل تجزئة لـ G [illegible] $G = a_1H \cup \dots$

$(G:1) = \mathrm{Card}\,a_1H + \dots + \mathrm{Card}\,a_nH = n\,\mathrm{Card}\,H$

(6) $Z(G)$ زمرة جزئية من G رتبتها p [illegible] $Z(G)$

[illegible] $\frac{G}{Z(G)}$ [illegible]

جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحانات الدورة الثانية للعام الدراسي 2014 - 2015
أسئلة مقرر البنى الجبرية (1)
سنة ثانية رياضيات

المدة: ساعة ونصف
العلامة: 100 درجة
الاسم:

أجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الأول (42 درجة):

أجب بكلمة صح، أو خطأ لكل مما يلي، مع ذكر التعليل أو التصويب لحالة الخطأ فقط:

(1) إن المجموعة $\{0, 2\}$ هي زمرة جزئية من الزمرة Z_6 .
(2) إن عدد عناصر الزمرة الجزئية $U_4(20)$ من الزمرة $U(20)$ يساوي 5.
(3) مرتبة العنصر (-1) في الزمرة $(Q , +)$ تساوي 2.
(4) عدد المرافقات اليسارية للزمرة الجزئية $H = \{1, 11\}$ في الزمرة $U(30)$ يساوي 8 .
(5) إن العنصر a^3 مولد للزمرة الدوارة $G = < a >$ والتي مرتبتها 21 .
(6) إذا كانت $(G, .)$ زمرة و $a \in G$ عنصراً مرتبته 12 فإن مرتبة العنصر a^5 في G تساوي 12.
(7) عدد عناصر زمرة الخارج $Z_{30}/< 6 >$ يساوي 5 .
(8) إن مقلوب العنصر 3 في زمرة أولر $U(7)$ يساوي 6 .
(9) عدد الزمر الجزئية في زمرة الخارج $U(20)/U_5(20)$ يساوي 4 .
(10) إذا كان $\varphi: U(30) \to U(30)$ تشاكلاً وكان $Ker\, \varphi = \{1, 11\}$ و $\varphi(7) = 7$ فإن $\varphi^{-1}(7) = 7 \cdot ker\, \varphi$.
(11) عدد الهومومورفيزمات (التشاكلات) الزمرية من الزمرة Z_{12} إلى الزمرة Z_{30} يساوي 12.
(12) إن الزمرة $Z \oplus Z$ دوارة لأن Z زمرة دوارة.
(13) رتبة العنصر $(2 , 3)$ من الزمرة $Z_3 \oplus Z_4$ يساوي 6 .
(14) إن $Z_2 \oplus Z_2 \cong U(8)$.

السؤال الثاني (28 درجة): لتكن $(G , \cdot)$ زمرة ما و $Z(G)$ مركز الزمرة G، علل صحة ما يلي:

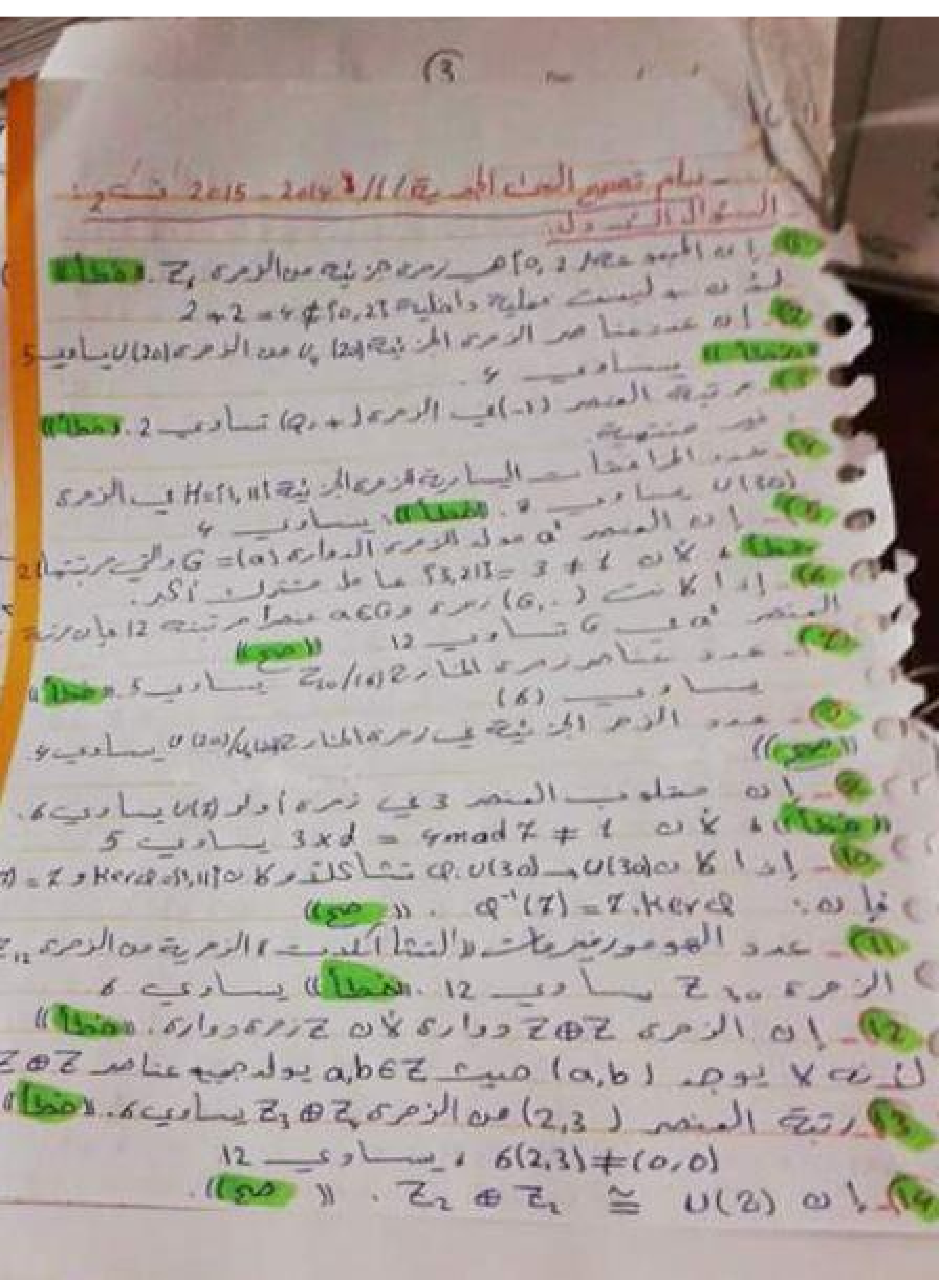
(1) أياً كان $a \in G$، فإن المجموعة $C(a) = \{x : x \in G; ax = xa\}$ هي زمرة جزئية من G.
(2) إذا كان $a , b \in G$ بحيث $a \cdot b \in Z(G)$ فإن $a . b = b . a$.
(3) الزمرة الجزئية $Z(G)$ ناظمية في G .
(4) كل زمرة جزئية ناظمية في G هي نواة لتشاكل زمري غامر.

السؤال الثالث (30 درجة): لتكن $(G , \cdot)$ زمرة منتهية ما.

(1) اذكر نص مبرهنة لاغرانج وبرهانها ثم اذكر نص عكسها .
(2) إذا كانت مرتبة G تساوي pq حيث p, q عددان أوليان ليسا بالضرورة مختلفان، فإن مرتبة مركز الزمرة G $(Z(G))$ ، إما أن تساوي 1 أو تساوي pq .
(3) لتكن مرتبة G تقبل القسمة على العدد الأولي P. عرف الـ P- زمرة سيلوفية ، ثم ادرس الزمرة التي مرتبتها 15.

2015 - 7 - 12

مع أطيب التمنيات بالنجاح
د. إيمان الخوجة



حل تصحيح امتحان الجبر الحديث (1) 2014 - 2015

السؤال الأول

1- إن المجموعة $\{0,2\}$ هي زمرة جزئية من الزمرة Z_4. ((خطأ)) لأنها ليست مغلقة داخلياً $2+2=4 \notin \{0,2\}$

2- إن عدد عناصر الزمرة الجزئية $\langle 20 \rangle$ من الزمرة $U(21)$ يساوي 6. ((خطأ)) الإجابة 5

3- رتبة العنصر (-1) في الزمرة $(Q,+)$ تساوي 2. ((خطأ)) غير منتهية

4- عدد المرافقات اليسارية للزمرة الجزئية $H=\{1,11\}$ في الزمرة $U(30)$ يساوي 8. ((خطأ)) يساوي 4

5- إن العنصر a^2 مولد للزمرة الدوارة $G=\langle a \rangle$ والتي رتبتها 21. ((خطأ)) لأن $(2,21) = 3 \neq 1$

6- إذا كانت $(G,\cdot)$ زمرة و $a \in G$ عنصراً رتبته 12 فإن رتبة العنصر a^{-1} في G تساوي 12 ((صح)) لأن لهما نفس الرتبة.

7- عدد عناصر زمرة المخارج $Z_{20}/\langle 4 \rangle$ يساوي (8). ((خطأ)) يساوي 5

8- عدد الزمر الجزئية في زمرة المخارج $U(20)/\langle 9 \rangle$ يساوي 4 ((صح))

9- إن مقلوب العنصر 3 في زمرة $U(7)$ يساوي 6. ((خطأ)) لأن $3 \times 6 = 4 \bmod 7 \neq 1$ يساوي 5

10- إذا كان $\varphi: U(30) \to U(30)$ تشاكلاً زمرياً و $\ker\varphi = \{1,11\}$ و $\varphi(7)=7$ فإن $\varphi^{-1}(7) = 7\ker\varphi$ ((صح))

11- عدد الهومومورفيزمات (التشاكلات) الغامرة من الزمرة Z_{12} إلى الزمرة Z_{10} يساوي 12. ((خطأ)) يساوي 6

12- إن الزمرة $Z \oplus Z$ دوارة لأن Z زمرة دوارة. ((خطأ)) لأنه لا يوجد (a,b) حيث $a,b \in Z$ يولد جميع عناصر $Z \oplus Z$

13- رتبة العنصر $(2,3)$ من الزمرة $Z_4 \oplus Z_6$ يساوي 6. ((خطأ)) $6(2,3) \neq (0,0)$، يساوي 12

14- إن $U(8) \cong Z_2 \oplus Z_2$. ((صح))

Scanned by CamScanner

السؤال الثاني:

لتكن $(G, .)$ زمرة ما و $Z(G)$ مركز الزمرة G.

1) - إذا كان $a \in G$ فإن المجموعة $C(a) = \{x : x \in G, ax = xa\}$ هي زمرة جزئية من G.

- بما أن: $ta = at$ أي $t \in C(a)$. ليكن $x, y \in C(a)$ عندئذ $ax = xa$ و $ay = ya$ وبما أن $y \ni G$ نظيره $y^{-1} \in G$ موجود ومنه $y^{-1}a = ay^{-1}$ وبالتالي:

$(xy^{-1})a = x(y^{-1}a) = x(ay^{-1}) = a(xy^{-1}) \Rightarrow xy^{-1} \in C(a)$

---

2) - إذا كان $a, b \in G$ حيث $a.b \in Z(G)$ فإن $a.b = b.a$.

- بما أن: $a.b \in Z(a)$ بالتالي إذا كان $x \in G$ فإن:

$(ab)x = x(ab) \Rightarrow b^{-1} \in G, (ab)b^{-1} = b^{-1}(ab) \Rightarrow$

$a = b^{-1}ab \Rightarrow ba = bb^{-1}ab = ab$

---

3) - الزمرة الجزئية $Z(G)$ ناظمية في G

- لدينا: $bZ(G)b^{-1} \subseteq Z(G)$ وذلك $\forall b \in G$ لأنه: إذا كان $y \in Z(G)$ فإن:

$byb^{-1} = ybb^{-1} = y \in Z(G) \Rightarrow$ $Z(G)$ ناظمية في G

---

4) - كل زمرة جزئية ناظمية في G هي نواة لتشاكل زمري ما.

- لتكن H ناظمية في G ولنأخذ التطبيق G/H من G: π المعرف على الشكل التالي $\pi g = gH$ وذلك $\forall g \in G$

إن π تشاكل لأنه: $\forall x, y \in G$ فإن:

$\pi(xy) = (xy)H = (xH)(yH) = \pi(x)\pi(x)$

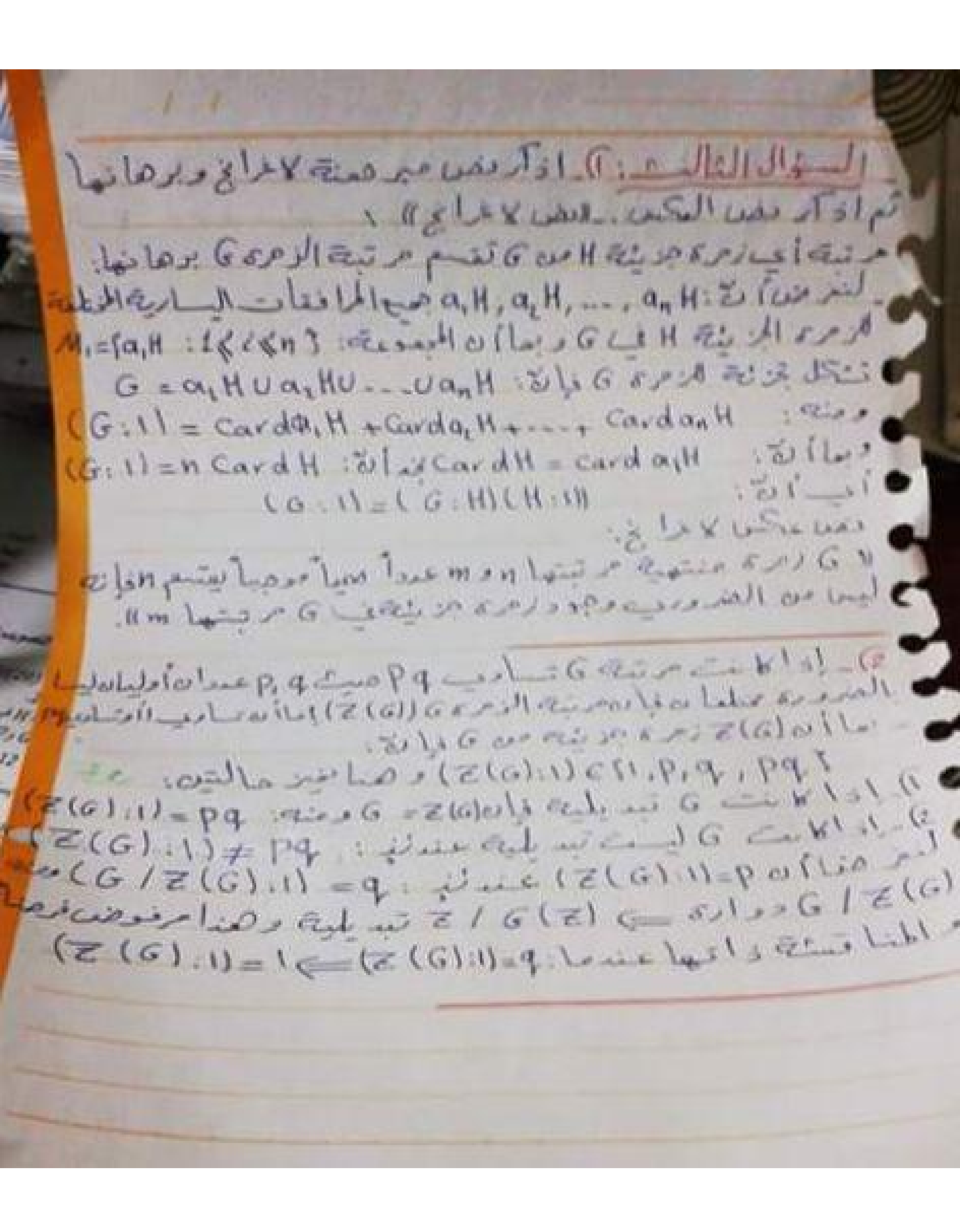
كما أن π غامر.

$\forall gH \in G/H$ فإن $g \in G$ و $\pi(g) = g(H)$

وإن: $\ker\pi = H$ ليكن $h \in H$ عندئذ:

$\pi(h) = h(H) = H$ ومنه $h \in \ker\pi$ أي $H \subseteq \ker\pi$

لكن $k \in \ker\pi$ عندئذ: $\pi(k) = kH = H$ ومنه $k \subseteq H$ أي ~~[illegible]~~ $\ker\pi \subseteq H$ ومنه التساوي $\ker\pi = H$ وهذه العلاقة تسمى التشاكل الطبيعي



السؤال الثالث: ① اذكر نص مبرهنة لاغرانج وبرهانها ثم اذكر نص العكس.. "نص لاغرانج".

مرتبة أي زمرة جزئية H من G تقسم مرتبة الزمرة G برهانها:

لنفرض أن: $a_1H, a_2H, \dots, a_nH$ جميع المرافقات اليسارية المختلفة للزمرة الجزئية H في G وبما أن المجموعة: $M_1=\{a_iH : 1\leq i\leq n\}$ تشكل تجزئة للزمرة G فإن: $G = a_1H \cup a_2H \cup \dots \cup a_nH$

ومنه: $(G:1) = \text{Card}\, a_1H + \text{Card}\, a_2H + \dots + \text{Card}\, a_nH$

وبما أن: $\text{Card}\, H = \text{Card}\, a_iH$ نجد أن: $(G:1) = n\, \text{Card}\, H$

أي أن: $(G:1)=(G:H)(H:1)$

نص عكس لاغرانج:

لا G زمرة منتهية مرتبتها n و m عدداً صحيحاً موجباً يقسم n فإنه ليس من الضروري وجود زمرة جزئية في G مرتبتها m.

② إذا كانت مرتبة G تساوي pq حيث p, q عددان أوليان ليسا بالضرورة مختلفان فإن مرتبة الزمرة $Z(G)$ إما أن تساوي الواحد أو pq [illegible]

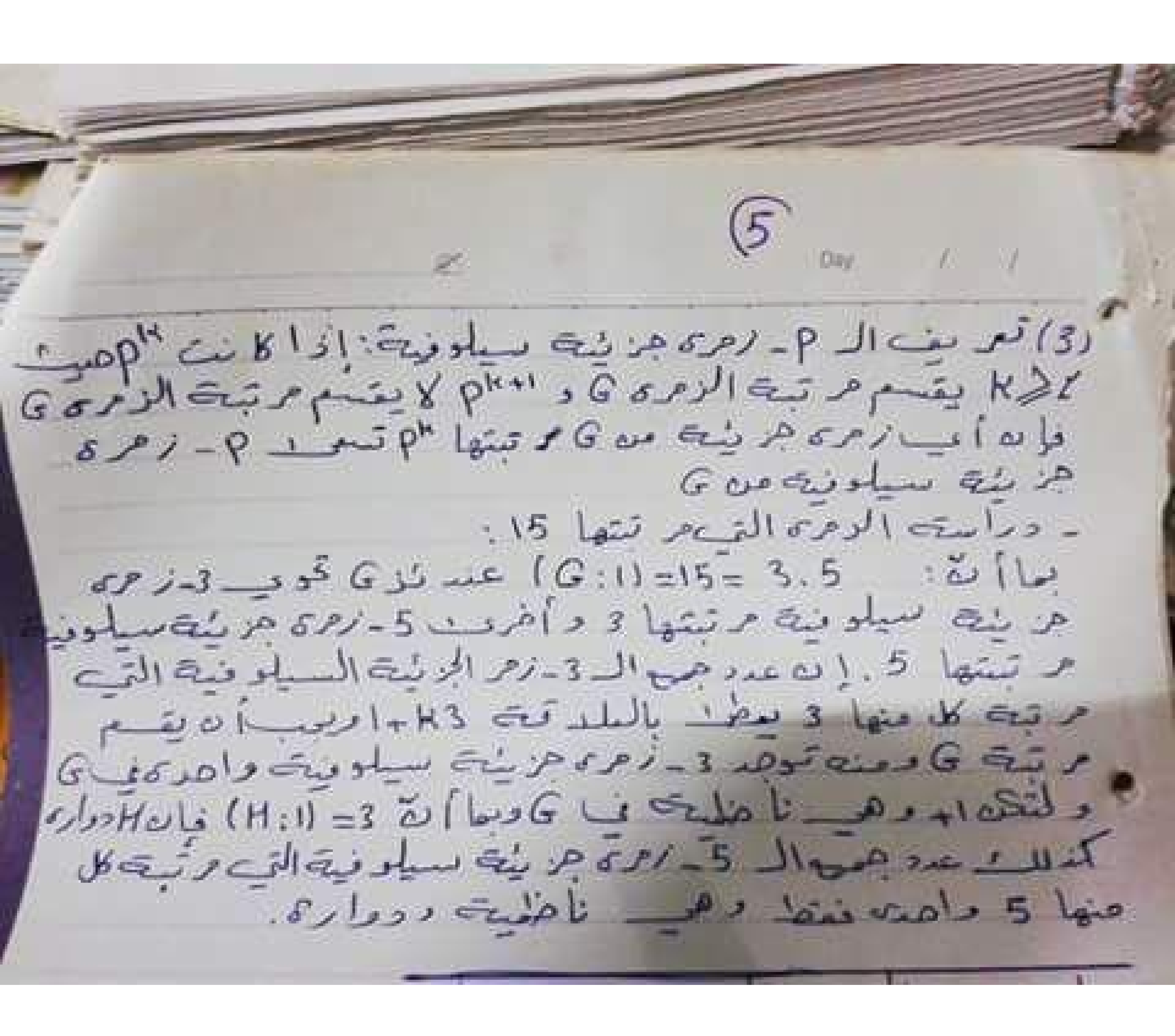
بما أن $Z(G)$ زمرة جزئية من G فإن: $(Z(G):1)\in\{1,p,q,pq\}$ وهنا نميز حالتين:

1) إذا كانت G تبديلية فإن $Z(G)=G$ ومنه: $(Z(G):1)=pq$

2) إذا كانت G ليست تبديلية عندئذ: $(Z(G):1)\neq pq$

لنفرض هنا أن $(Z(G):1)=p$ عندئذ: $(G/Z(G):1)=q$ ومنه $G/Z(G)$ دوارة $\Longrightarrow$ $G/Z(G)$ تبديلية وهذا مرفوض [illegible]

[illegible] المثل نستنتج ذاتها عندما: $(Z(G):1)=q$ $\Longrightarrow$ $(Z(G):1)=1$



(3) تعريف الـ p- زمرة جزئية سيلوفية: إذا كانت p^k حيث $k\geq 1$ يقسم مرتبة الزمرة G و p^{k+1} لا يقسم مرتبة الزمرة G فإنه أي زمرة جزئية من G مرتبتها p^k تسمى p- زمرة جزئية سيلوفية من G

- دراسة الزمرة التي مرتبتها 15:

بما أنه: $(G:1)=15=3.5$ عندئذ G تحوي 3- زمرة جزئية سيلوفية مرتبتها 3 وأخرى 5- زمرة جزئية سيلوفية مرتبتها 5. إنه عدد جميع الـ 3- زمر الجزئية السيلوفية التي مرتبة كل منها 3 يعطى بالعلاقة $1+3k$ ويجب أن يقسم مرتبة G ومنه توجد 3- زمرة جزئية سيلوفية واحدة في G ولتكن H وهي ناظمية في G وبما أنه $(H:1)=3$ فإن H دوارة كذلك عدد جميع الـ 5- زمرة جزئية سيلوفية التي رتبة كل منها 5 واحدة فقط وهي ناظمية ودوارة.

2 - 2015

1- خطأ {0,2} ليست زمرة جزئية لأن (+) ليست مغلقة

$H=\{0,2\}$ حيث $2+2=4 \notin H$ بينما $2 \in \{0,2\}$ والعملية

2- خطأ عدد عناصر $U_4(20)$ هي 4 لأن

$U(20)=\{1,3,7,9,11,13,17,19\}$

$U_4(20)=\{1,9,13,17\}$

3- خطأ غير منتهية

4- عناصر $U(30)=\{1,7,11,13,17,19,23,29\}$, عناصر

Sol $H=\{1,11\}$

$1H=\{1,11\}$

$7H=\{7,17\}$

$11H=\{11,1\}$ مكرر

$13H=\{13,23\}$

$17H=\{17,7\}$ مكرر

$19H=\{19,29\}$

$23H=\{23,13\}$ مكرر

$29H=\{29,19\}$ مكرر

هنا عدد المرافقات اليسارية يساوي 4

5- خطأ لأن 3 و 21 ليس اوليان فيما بينهما

$gcd(21,3) \neq 1$

6- لدينا $a^{12}=e$ و ~~gcd(12,5)~~: $lcm(12,5)=60$ مضاعف مشترك الأصغر

و $12=\frac{60}{5}$ فالعبارة صحيحة

7- قاعدة: اذا كان K يقسم n فإن $Z_n/\langle K\rangle \cong Z_k$

ومنه 6 تقسم 30 عندئذ $Z_{30}/\langle 6\rangle \cong Z_6$ وفي Z_6

يوجد 6 عناصر فالعبارة خاطئة

8- خطأ لأن

$3\times 6=18 \bmod 7=4 \neq 1$

9-

2 - 2015

٩- صح $U_{(20)}/H = \{1, 11\}$ و $\{H, 3H, 7H, 19H\}$

١٠- صح اعتماداً على اذا كان $\varphi : G \to \bar{G}$ تشاكل زمري
وإذا كانت $\varphi(g) = g'$ فإن $\varphi^{-1}(g') = g \cdot \ker\varphi$

١١- خطأ القاسم المشترك الأعظم لـ 12 و 30 هو ستة

١٢- خطأ ليس بالضرورة لأنه بفرض $a, b \in Z$ و بفرض $Z \oplus Z$
دوارة ومولدة بالعنصر (a,b) عندئذ $Z \oplus Z = \langle (a,b) \rangle$ ومنه
اذا كان $a = b$ عندئذ نجد أن $(1,2) \notin \langle (a,b) \rangle$ وهذا غير ممكن
وإذا كان $a \neq b$ " " " $(1,1) \notin \langle (a,b) \rangle$ " " "

١٣- خطأ لأن رتبة العنصر 2 في Z_3 هي 3
ورتبة العنصر 3 في Z_4 هي 4
والمضاعف المشترك الأصغر لـ 3 و 4 هو 12

١٤- صح

husenali

جامعة البعث	امتحانات الدورة الثانية للعام الدراسي 2014 - 2015	المدة: ساعة ونصف
كليـة العلـوم	أسئلة مقرر البنى الجبرية (1)	العلامة: 100 درجة
قسم الرياضيات	سنة ثانية رياضيات	الاسم:

أجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الأول (42 درجة):

أجب بكلمة صح، أو خطأ لكل مما يلي، مع ذكر التعليل أو التصويب لحالة الخطأ فقط:

(1) إن المجموعة $\{0, 2\}$ هي زمرة جزئية من الزمرة Z_6 .

(2) إن عدد عناصر الزمرة الجزئية $U_4(20)$ من الزمرة $U(20)$ يساوي 5.

(3) مرتبة العنصر (1-) في الزمرة $(Q, +)$ تساوي 2.

(4) عدد المرافقات اليسارية للزمرة الجزئية $H = \{1, 11\}$ في الزمرة $U(30)$ يساوي 8 .

(5) إن العنصر a^3 مولد للزمرة الدوارة $G = < a >$ والتي مرتبتها 21 .

(6) إذا كانت $(G, .)$ زمرة و $a \in G$ عنصراً مرتبته 12 فإن مرتبة العنصر a^5 في G تساوي 12.

(7) عدد عناصر زمرة الخارج $Z_{30}/< 6 >$ يساوي 5 .

(8) إن مقلوب العنصر 3 في زمرة اولر $U(7)$ يساوي 6 .

(9) عدد الزمر الجزئية في زمرة الخارج $U(20)/U_5(20)$ يساوي 4 .

(10) إذا كان $\varphi: U(30) \to U(30)$ تشاكلا وكان $\text{Ker}\,\varphi = \{1, 11\}$ و $\varphi(7) = 7$ فإن $\varphi^{-1}(7) = 7 \cdot \ker \varphi$.

(11) عدد الهومومورفيزمات (التشاكلات) الزمرية من الزمرة Z_{12} إلى الزمرة Z_{30} يساوي 12.

(12) إن الزمرة $Z \oplus Z$ دوارة لأن Z زمرة دوارة.

(13) رتبة العنصر $(2, 3)$ من الزمرة $Z_3 \oplus Z_4$ يساوي 6 .

(14) إن $Z_2 \oplus Z_2 \cong U(8)$.

السؤال الثاني (28 درجة):

لتكن $(G, \cdot)$ زمرة ما و $Z(G)$ مركز الزمرة G، علل صحة ما يلي:

(1) أياً كان $a \in G$، فإن المجموعة $C(a) = \{x : x \in G; ax = xa\}$ هي زمرة جزئية من G.

(2) إذا كان $a, b \in G$ بحيث $a \cdot b \in Z(G)$ فإن $a . b = b . a$.

(3) الزمرة الجزئية $Z(G)$ ناظمية في G .

(4) كل زمرة جزئية ناظمية في G هي نواة لتشاكل زمري غامر.

السؤال الثالث (30 درجة):

لتكن $(G, \cdot)$ زمرة منتهية ما.

(1) اذكر نص مبرهنة لاغرانج وبرهانها ثم اذكر نص عكسها .

(2) إذا كانت مرتبة G تساوي pq حيث p, q عددان أوليان ليسا بالضرورة مختلفان، فإن مرتبة مركز الزمرة G ($Z(G)$) ، إما أن تساوي 1 أو تساوي pq .

(3) لتكن مرتبة G تقبل القسمة على العدد الأولي P. عرف الـ P- زمرة سيلوفية ، ثم ادرس الزمرة التي مرتبتها 15.

2015 - 7 - 12

مع أطيب التمنيات بالنجاح

د. إيمان الخوجة

جامعة البعث	امتحانات الدورة الفصلية الثانية للعام الدراسي 2012 – 2013	
كليـة العلـوم	أسئلة مقرر البنى الجبرية (1)	العلامة: 100 درجة
قسم الرياضيات	سنة ثانية رياضيات	الاسم:

أجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الأول (36 درجة):

أجب بكلمة صح، أو خطأ لكل مما يلي، مع ذكر التعليل أو التصويب لحالة الخطأ فقط:

(1) إن $3Z \cap 5Z = 8Z$.

(2) إن نظير العنصر 13 في زمرة اولر $U(21)$ هو 5 .

(3) مرتبة العنصر $<8>+14$ في زمرة الخارج $Z_{24}/_{<8>}$ تساوي 3 .

(4) عدد المرافقات اليسارية للزمرة الجزئية $H=<3>$ في الزمرة Z_{18} يساوي **18** .

(5) جميع عناصر زمرة الخارج $U(20)/H = U_5(20)$ هم $\{H, 3H, 7H\}$.

(6) إذا كانت G زمرة مرتبتها 29 فإن G لا تكون زمرة دوارة .

(7) عدد الزمر الجزئية في الزمرة $U(10)$ يساوي 5 زمر جزئية.

(8) جميع مولدات الزمرة الجمعية Z_{20} التي لا تساوي 1 هي أعداد أولية.

(9) كل زمرة دوارة غير منتهية تملك مولدين فقط .

(10) عدد الهومومورفيزمات الزمرية من الزمرة Z_{15} إلى الزمرة Z_{30} يساوي 15.

(11) إن $U(8) \cong U(10)$ لأن للزمرتين الرتبة نفسها.

(12) توجد 3- زمرة جزئية سيلوفية مرتبتها 3 واحدة فقط في الزمرة G التي مرتبتها 15 .

السؤال الثاني (24درجة): لتكن $(G,\cdot)$ زمرة ما، علل صحة ما يلي:

(1) إن مركز الزمرة $Z(G)$ هو زمرة جزئية من G، حيث $Z(G)=\{a\in G;\ ax=xa,\ \forall x\in G\}$.

(2) إذا كانت $G=<a>$ زمرة دوارة حيث $a\in G$ مرتبته n ، فإن مرتبة الزمرة G تساوي n.

(3) كل زمرة دوارة هي زمرة تبديلية .

(4) جميع الزمر الدوارة وغير المنتهية متماثلة (ايزومورفية مع بعضها) .

السؤال الثالث (40درجة): لتكن $(G,\cdot)$ زمرة ما. أثبت ما يلي:

(1) إذا كانت G منتهية فإن مرتبة أي زمرة جزئية H من G تقسم مرتبة الزمرة G.

(2) كل زمرة جزئية ناظمية في الزمرة G هي نواة لهومومورفيزم زمري غامر.

(3) إذا كانت A زمرة جزئية ناظمية في G ودوارة، فإن أية زمرة جزئية من A تكون ناظمية في G.

(4) إذا كانت K زمرة جزئية ناظمية في G، و P عدداً أولياً ، وكان كل من K وزمرة الخارج $G/_K$ ، P- زمرة، فإن الزمرة G تكون P– زمرة .

2013 – 7 - 4

مع أطيب التمنيات بالنجاح

د. إيمان الخوجة

جامعة البعث — امتحانات الفصل الأول للعام الدراسي 2010 - 2011 — المدة: ساعتان

كليـة العلـوم — أسئلة الدورة الأولى لمقرر البنى الجبرية (1) — العلامة: 100 درجة

قسم الرياضيات — سنة ثانية رياضيات — الاسم:

أجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الأول (36 درجة):

أجب بكلمة صح، أو خطأ لكل مما يلي، مع ذكر التعليل أو التصويب لحالة الخطأ فقط:

(1) $(Z_n , +)$ حيث $n > 1$ ، زمرة جزئية من $(Z , +)$.

(2) إن عناصر الزمرة الجزئية $U_3(21)$ من الزمرة $U(21)$ هي {1, 4 10, 13, 16 } فقط.

(3) عدد المرافقات اليسارية للزمرة الجزئية **8Z** في الزمرة $(2Z , +)$ يساوي **3** .

(4) عدد الزمر الجزئية في الزمرة الدوارة $G = <a>$ والتي مرتبتها **20** يساوي **8** زمر جزئية.

(5) $6Z \cap 3Z = 3Z$.

(6) الزمرة $Z_3 \oplus Z_5$ زمرة دوارة .

(7) عدد مولدات الزمرة الجمعية Z_8 يساوي **3** .

(8) رتبة زمرة الخارج $U(20)/U_5(20)$ تساوي **5** .

(9) عدد الهومومورفيزمات الزمرية من الزمرة Z_{20} إلى الزمرة Z_{10} يساوي **20** .

(10) أيا كان $k \in U(8)$ فإن $U(8) \neq <k>$ (الزمرة المولدة بـ k) .

(11) مرتبة العنصر (1,3) في الزمرة $Z_2 \oplus Z_4$ تساوي 2 .

(12) $Z_{27} \cong Z_3 \oplus Z_9$.

السؤال الثاني (30 درجة): لتكن $(G , \cdot)$ زمرة ما ، علل صحة ما يلي:

(1) إذا كان $a \in G$ ، فإن $<a> = <a^{-1}>$.

(2) إذا كان $a \in G$ مرتبته n ، وإذا وجد $k \in Z$ يحقق $a^k = e$ فإن n يقسم k.

(3) إذا كانت G منتهية مرتبتها عدد أولي فإنها تكون دوارة.

(4) إذا كانت H زمرة جزئية من G، وكان $(G:H) = 2$، فإن H ناظمية في G.

(5) كل زمرة جزئية ناظمية في G هي نواة لهومومورفيزم زمري غامر.

السؤال الثالث (24 درجة): لتكن G زمرة ما، ولتكن المجموعة $Z(G)=\{a\in G;\ ax=xa,\ \forall x\in G\}$.

(1) أثبت أن الزمرة الجزئية $Z(G)$ ناظمية في G .

(2) أثبت أنه إذا كانت زمرة الخارج $G/Z(G)$ دوارة، فإن الزمرة G تبديلية .

(3) إذا كانت **G** زمرة منتهية وغير تبديلية مرتبتها p^3 ، حيث **p** عدد أولي، فأثبت أنه إذا كان $Z(G) \neq <e>$ فإن $(Z(G) : 1) = p$.

السؤال الرابع (10 درجة): لتكن G زمرة منتهية رتبتها تقبل القسمة على العدد الأولي P .

اذكر نص عكس مبرهنة لاغرانج، ثم عرف الـ p- زمرة جزئية سيلوفية في G ، و ادرس الزمرة التي مرتبتها 15 ؛ وحدد الـ P- زمر جزئية سيلوفية فيها وهل G تحوي زمرة جزئية ناظمية، وضح ذلك.

2011 – 1 - 16

مع أطيب التمنيات بالنجاح

د. إيمان الخوجة



جامعة البعث | امتحانات الفصل الأول للعام الدراسي 2009 - 2010 | المدة: ساعتان

كلية العلـوم | أسئلة الدورة الأولى لمقرر البنى الجبرية (1) | العلامة: 80 درجة

قسم الرياضيات | سنة ثانية رياضيات | الاسم:

أجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الأول (36 درجة):

أجب بكلمة صح، أو خطأ لكل مما يلي، مع ذكر التعليل أو التصويب لحالة الخطأ فقط:

(1) $2Z \cup 8Z$ زمرة جزئية في Z وتساوي الزمرة 8Z.

(2) جميع مولدات الزمرة الجمعية Z_{20} أعداد أولية .

(3) المرافقات اليسارية للزمرة الجزئية $H=\{1 , 11\}$ من الزمرة U(30) هي 1H، 7H فقط.

(4) رتبة العنصر 14 في الزمرة U(15) بالنسبة لعملية الضرب بالمقاس 15 تساوي 3.

(5) عدد الزمر الجزئية في الزمرة Z_{10} يساوي 10 زمر جزئية.

(6) إن $\emptyset(10) = 5$ حيث $\emptyset$ هو تابع اولر .

(7) كل زمرة دوارة غير منتهية لها 4 مولدات .

(8) U(14) زمرة دوارة .

(9) مرتبة العنصر $<6>+5$ في زمرة الخارج $Z_{18}/<6>$ تساوي 5 .

(10) عدد عناصر زمرة الخارج $<4>/<20>$ تساوي 4.

(11) الزمرة الجزئية $H = <6>$ في الزمرة Z_{18} ليست ناظمية فيها.

(12) $Z_4 \cong U(8)$.

السؤال الثاني (15 درجة): علل صحة ما يلي:

لتكن $(G , \cdot)$ زمرة و $a \in G$ مرتبته n .

(1) أياً ،كان العدد الصحيح s حيث $1 \le s \le n$ فإن $o(a^s) = o(a^{n-s})$.

(2) إذا وجد $k \in Z$ بحيث $a^k = e$ فإن n يقسم k.

(3) إذا كانت $G/Z(G)$ دوارة فإن G تبديلية.

السؤال الثالث (14 درجة): لتكن G زمرة و H , K زمرتين جزئيتين من G.

إذا كانت الزمرة الجزئية K ناظمية في G، فأثبت أن :

$$HK/K \approx H/H\cap K \ .$$

السؤال الرابع (15 درجة): لتكن G زمرة منتهية رتبتها تقبل القسمة على العدد الأولي P .

عرف الـ p- زمرة والـ p- زمرة جزئية سيلوفية في G ، ثم ادرس الزمرة التي مرتبتها 48 ، وحدد الـ P-زمر جزئية سيلوفية فيها.

2010 - 1 - 4

مع أطيب التمنيات

د. إيمان الخوجة

جامعة البعث — امتحانات الفصل الأول للعام الدراسي 2008 – 2009 — المدة: ساعتان

كلية العلوم — أسئلة الدورة الأولى لمقرر البنى الجبرية (1) — العلامة: 80 درجة

قسم الرياضيات — سنة ثانية رياضيات — الاسم: ردينة مراد

أجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الأول (36 درجة):

أجب بكلمة صح، أو خطأ لكل مما يلي، مع ذكر التعليل أو التصويب لحالة الخطأ فقط:

١. $(\{6^n \setminus n \in Z\},\cdot)$ زمرة جزئية من الزمرة $(Q^+,\cdot)$.

٢. 8 يولد زمرة جزئية من الزمرة Z_{12} مرتبتها تساوي 5 .

٣. عدد الزمر الجزئية في الزمرة Z_{18} يساوي 5 زمر جزئية .

٤. جميع مولدات الزمرة Z_{24} أعداد أولية.

٥. $(Q,+)$ زمرة دوارة.

٦. كل زمرة دوارة غير منتهية تملك مولد واحد فقط.

٧. عدد مرافقات الزمرة الجزئية $4Z$ في الزمرة $2Z$ يساوي 4 .

٨. $Z_9 \cong Z_3 \oplus Z_3$.

٩. رتبة العنصر $(2,3)$ في الزمرة $Z_6 \oplus Z_{15}$ تساوي 15 .

١٠. رتبة العنصر 2 في الزمرة $U(15)$ بالنسبة لعملية الضرب بالمقاس 15 تساوي 6 .

١١. رتبة أي عنصر من عناصر الزمرة غير المنتهية $(Q^*,\cdot)$ غير منتهية.

١٢. إذا كانت $G=\langle a\rangle$ زمرة دوارة مرتبتها 20، فإن جميع الزمر الجزئية فيها هم: $\langle a\rangle , \langle a^2\rangle , \langle a^4\rangle , \langle a^5\rangle , \langle a^{10}\rangle$.

السؤال الثاني (20 درجة): علل ما يلي :

١. إذا كانت G زمرة، فإن المجموعة $Z(G)=\{a : a\in G ; ax = xa , \forall x\in G\}$ زمرة جزئية ناظمية في الزمرة G.

٢. كل زمرة منتهية مرتبتها عدد أولي هي زمرة دوارة.

٣. إذا كانت G زمرة دوارة مولدة بالعنصر a من G وغير منتهية، فإن التطبيق: $f : Z \to G$ المعرف بالشكل أياً كان $n\in Z$ فإن $f(n)=a^n$ ، يكون تقابل.

السؤال الثالث (24 درجة): لتكن G زمرة منتهية و p عدداً أولياً .

متى نقول عن G إنها p- زمرة .

١. إذا كانت G p- زمرة، فأثبت أن كل زمرة جزئية في G هي p- زمرة.

٢. إذا كانت K زمرة جزئية ناظمية من G، وكان كل من K و زمرة الخارج G/K p- زمرة ، فأثبت أن الزمرة G تكون p- زمرة.

حمص 29 – 1 – 2009

مع أطيب الأمنيات

د . إيمان الخوجة

جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحانات الفصل الثاني للعام الدراسي 2008 - 2009
أسئلة الدورة الثانية لمقرر البنى الجبرية (1)
سنة ثانية رياضيات

المدة: ساعتان
العلامة: 80 درجة
الاسم:

أجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الأول (36 درجة):

أجب بكلمة صح، أو خطأ لكل مما يلي، مع ذكر التعليل أو التصويب لحالة الخطأ فقط:

(1) $2Z \cup 5Z$ زمرة جزئية في Z .

(2) $(12Z, +)$ زمرة جزئية من الزمرة $(24Z, +)$.

(3) عدد عناصر الزمرة الجزئية الدوارة من الزمرة Z_{42} والمولدة بالعدد 30 يساوي 5 .

(4) عدد الزمر الجزئية في الزمرة Z_{12} يساوي 12 زمرة جزئية.

(5) كل زمرة تبديلية هي زمرة دوارة .

(6) كل زمرة دوارة غير منتهية لها 4 مولدات .

(7) عدد مرافقات الزمرة الجزئية المولدة بالعدد 2 من الزمرة Z_{12} يساوي 6.

(8) رتبة زمرة الخارج $Z_6/_{<3>}$ تساوي 3 .

(9) مرتبة الزمرة $Z_{12} \oplus Z_{15}$ تساوي 60 .

(10) رتبة العنصر 7 في الزمرة $U(15)$ بالنسبة لعملية الضرب بالمقاس 15 تساوي 4.

(11) مرتبة أي عنصر مغاير للصفر في زمرة الأعداد الصحيحة Z غير منتهية.

(12) $Z_6 \cong Z_2 \oplus Z_3$.

30

السؤال الثاني (14 درجة): علل صحة ما يلي:

(1) إذا كانت $H = \{x : x \in U(20);\ x \equiv 1 \bmod 3\}$ ، حيث $U(20)$ زمرة أولر بالنسبة للضرب بالمقاس 20. بين أن H ليست زمرة جزئية من الزمرة $U(20)$.

(2) إذا كانت $(G, \cdot)$ زمرة منتهية مرتبتها n ، عندئذ أياً كان $a \in G$ فإن: $a^n = e$.

السؤال الثالث (14 درجة): ليكن $f : G \to G'$ هومومورفيزماً زمرياً:

(1) أثبت أن كل زمرة جزئية ناظمية في G هي نواة لهومومورفيزم زمري غامر.

(2) أثبت أن $G/_{\ker f} \cong \operatorname{Im} f$.

10

السؤال الرابع (16 درجة): لتكن G زمرة منتهية رتبتها تقبل القسمة على العدد الأولي P .
عرف الـ p- زمرة جزئية سيلوفية في G ، ثم ادرس الزمرة التي مرتبتها 40 ، وحدد الـ p- زمر جزئية سيلوفية فيها.

16

مع أطيب التمنيات
د. إيمان الخوجة

2009 - 6 - 21

جامعة البعث امتحانات الفصل الأول للعام الدراسي 2007 – 2008
كلية العلوم أسئلة الدورة الأولى لمقرر البنى الجبرية (1) العلامة: 80 درجة
قسم الرياضيات سنة ثانية رياضيات الاسم: مرسم محمد أمومر

أجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الأول (36 درجة):

أجب بكلمة صح أو خطأ لكل مما يلي ، مع ذكر التصويب أو التعليل لحالة الخطأ فقط:

(1) مجموعة الأعداد الحقيقية المغايرة للصفر R^* مغلقة بالنسبة لعملية الجمع (+).
(2) $(12Z, +)$ زمرة جزئية من الزمرة $(6Z, +)$.
(3) رتبة الزمرة الجزئية المولدة بالعدد 3 من الزمرة $(Z_4, +)$ تساوي 2 .
(4) كل زمرة تبديلية هي زمرة دوارة .
(5) عدد مولدات الزمرة الدوارة التي مرتبتها 8 يساوي 3.
(6) إن عدد جميع الزمر الجزئية في الزمرة Z_6 يساوي 3.
(7) مرافقات الزمرة الجزئية $(4Z, +)$ في الزمرة $(2Z, +)$ هي :
$0+4Z, 1+4Z, 2+4Z, 3+4Z$
(8) $Z_6 \cong Z_2 \oplus Z_3$.
(9) رتبة العنصر $(0,6)$ في الزمرة $Z_4 \oplus Z_{12}$ تساوي 2 .
(10) مرتبة الزمرة $Z_{12} \oplus Z_{15}$ تساوي 60 .
(11) يمكن أن تكون نواة الهومومورفيزم الزمري مجموعة خالية .
(12) $(Z, +) \cong (Q, +)$ حيث Q مجموعة الأعداد العادية .

السؤال الثاني (24 درجة):

لتكن G زمرة و A , B زمرتين جزئيتين من الزمرة G.
(أ) إذا كان $AB = BA$ ، فأثبت أن الجداء AB زمرة جزئية في G.
(ب) إذا كانت كل من الزمرتين A , B ناظمية في G ، فأثبت أن الجداء AB زمرة جزئية ناظمية في G.
(جـ) إذا كانت كل من الزمرتين A , B تبديلية و ناظمية في G ، وإذا كان $A \cap B = \langle e \rangle$ ، فأثبت أن الجداء AB هو زمرة تبديلية .

السؤال الثالث (20 درجة): لتكن G زمرة منتهية رتبتها تقبل القسمة على العدد الأولي p .
عرف الـ p- زمر جزئية سيلوفية في G ، ثم برهن ما يلي:
(أ) إذا كانت K هي p- زمرة جزئية سيلوفية و ناظمية في G ، فأثبت أنه لايوجد في G سوى p- زمرة جزئية سيلوفية واحدة فقط هي K.
(ب) ادرس الزمرة التي مرتبتها 15 و حدد الـ p- زمر جزئية سيلوفية فيها .

حمص 28 – 1 – 2008

مع أطيب الأمنيات بالنجاح والتوفيق
د . إيمان الخوجة

سلم تصحيح مقرر البنى الجبرية (1) سنة ثانية رياضيات

2008 - 2007

الفصل الأول

الجواب الأول: 36 درجة لكل حالة ثلاث درجات

(1) خطأ مثلاً $-2, +2 \in R^{+}$ لكن $(-2)+(+2) = 0 \notin R^{+}$

(2) صح

(3) خطأ هي الزمرة الجزئية الناظمية 3، 4 أو ليان نسبياً

(4) خطأ $(Q^{+}, \cdot)$ زمرة تبديلية وليست دوارة أو $(Q, +)$.

(5) خطأ يساوي اربعة

(6) خطأ يساوي أربعة وهي

(7) خطأ المرافقات هي $\langle 0 \rangle, \langle 1 \rangle, \langle 2 \rangle = \langle 4 \rangle, \langle 3 \rangle$

$0+4Z, 2+4Z$

(8) صح

(9) صح

(10) خطأ تساوي 180

(11) خطأ لأن $f(e) = e'$ على الأقل مجموعة فيها e ما يدل المنطلق

(12) خطأ Z دوارة و Q غير دوارة

الجواب الثاني 24 درجة

(أ): $AB \neq \phi$. ليكن $x, y \in AB$ عندئذ $x = ab$ و $y = a'b'$ حيث $a, a' \in A$ و $b, b' \in B$ ومنه نجد

$x y^{-1} = a \underbrace{(b b'^{-1})}_{b_0} a'^{-1} = a b_0 a'^{-1}$ (8)

وبما أن $b_0 a'^{-1} \in BA = AB$ فإنه يوجد $a_0 \in A, b_1 \in B$ بحيث $b_0 a'^{-1} = a_0 b_1$

وهذا يبين لنا أن $x y^{-1} = a b_0 a'^{-1} = a a_0 b_1 \in AB$. إذاً AB زمرة جزئية في G.

(ب) لنبرهن أن $\forall g \in G : g(AB)g^{-1} \subseteq AB$، ليكن $x \in g(AB)g^{-1}$ عندئذ

(8) يوجد $a \in A, b \in B$ بحيث $x = g(ab)g^{-1} = (gag^{-1})(gbg^{-1}) \in AB$

(جـ) أيا كان $a \in A, b \in B$ فإن

$$(ab)(a^{-1}b^{-1}) = (aba^{-1})b^{-1} \in B$$

(8) كذلك

$$(ab)(a^{-1}b^{-1}) = a(ba^{-1}b^{-1}) \in A$$

وبما أن $A \cap B = \{e\}$ نجد أن $ab = ba$ اذاً AB زمرة تبديلية.

الجواب الثالث 20 درجة

الـ P- زمرة سيلوفية من G هي الزمرة التي مرتبة كأمثل أكبر قوة للعدد (5) الأولي تقسم مرتبة الزمرة G.

أي إذا كان p^k حيث $k \geq 1$ يقسم مرتبة الزمرة G و p^{k+1} لا يقسم مرتبة الزمرة G عندئذ أي زمرة جزئية من G مرتبتها p^k تسمى P- زمرة جزئية سيلوفية من G.

(أ) لتكن H P- زمرة جزئية سيلوفية أخرى في G عندئذ K و H مترافقتان (7) لأن كل P- زمرة سيلوفية وبالتالي يوجد $x \in G$ بحيث $H = xKx^{-1}$

ومن كون K ناظمية في G نجد أن $H = xKx^{-1} = K$.

(ب) بما أن $(G:1) = 15 = 3.5$ عندئذ G تحوي 3- زمرة جزئية سيلوفية مرتبتها 3 واحدة. 5- زمرة جزئية سيلوفية مرتبتها 5

(8) إن عدد جميع الـ 3- زمرة جزئية سيلوفية مرتبتها كأمثال 3 يعطى بالعلاقة $1+k3$ ويجب أن يقسم مرتبة G. من أجل $k \neq 0$ فإن $1+k3$ لا يقسم مرتبة الزمرة G اذاً توجد 3- زمرة جزئية سيلوفية واحدة فقط من G.

كما أن عدد جميع الـ 5- زمرة جزئية سيلوفية التي مرتبة كأمثال 5 واحد فقط لأنه من أجل $k \neq 0$ فإن $1+k5$ لا يقسم مرتبة G.

2007 - 6 - 19

د. إيمان الحوص

جامعة البعث　　امتحانات الفصل الأول للعام الدراسي 2006 – 2007
كلية العلوم　　أسئلة الدورة الأولى لمقرر البنى الجبرية (1)　　العلامة: 80 درجة
قسم الرياضيات　　سنة ثانية رياضيات　　الاسم: رحمن العبد الله

أجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الأول (30 درجة): لتكن $(G,\cdot)$ زمرة ما
أجب بكلمة صح، أو بكلمة خطأ لكل مما يلي، مع ذكر التعليل أو التصويب لحالة الخطأ:

(1) العنصر الأعظمي في المجموعة المرتبة إن وجد فهو وحيد .
(2) الفترة الحقيقية المغلقة $[0 , 1]$ هي مجموعة مرتبة جيداً.
(3) اجتماع زمرتين جزئيتين في زمرة هو زمرة جزئية فيها.
(4) كل زمرة دوارة هي زمرة تبديلية.
(5) إن مرتبة كل عنصر من عناصر الزمرة غير المنتهية تكون غير محدودة.
(6) كل زمرة جزئية من زمرة دوارة تكون زمرة دوارة.
(7) إن مولدات الزمرة الجمعية $(Z_8 , +)$ هي فقط 1 و 5 .
(8) كل زمرة دوارة ومنتهية تكون إيزومورفية مع الزمرة الجمعية $(Z,+)$.
(9) إذا كانت A , B زمرتين جزئيتين من الزمرة G و B ناظمية في G فإن $B\cdot A$ زمرة جزئية في G.
(10) إذا كانت الزمرة الجزئية A ناظمية في G فإن أية زمرة جزئية في A تكون ناظمية في G.

ملاحظة: كل إجابة خطأ تذهب إجابة صحيحة.

السؤال الثاني (15 درجة):
لتكن لدينا الزمرة الدوارة غير المنتهية $(G,\cdot)$ المولدة بالعنصر x ولنعرف المجموعة الجزئية H من G كما يلي:
$y \in H \iff y$ هو عنصر مولد للزمرة G . أثبت أن $H=\{x , x^{-1}\}$.

السؤال الثالث (15 درجة): برهن صحة المبرهنة الآتية:
لتكن G زمرة منتهية من المرتبة n ولتكن H زمرة جزئية اختيارية من G بحيث إن مرتبة H تساوي k عندئذ يقبل العدد n القسمة على k .

السؤال الرابع (20 درجات): لتكن G زمرة منتهية و p عدداً أولياً. متى نسمي G p- زمرة .
عرف الـ p- زمرة جزئية سيلوفية في G . ثم برهن مايلي:
(أ) إذا كانت G p- زمرة فبرهن أن كل زمرة جزئية من G هي p- زمرة.
(ب) لتكن G زمرة مرتبتها 30. حدد الـ p- زمر جزئية سيلوفية في G حسب مبرهنات سيلوف وذلك بدراسة الزمرة G.

حمص في 15 – 1 – 2007　　مع أطيب التمنيات بالنجاح والتوفيق
د. إيمان الخوجة

سلم تصحيح مقرر البنى الجبرية (1) سنة ثانية رياضيات

الدورة الأولى العام الدراسي 2006 - 2007

الجواب الأول: [30] لكل حالة 3 درجات أكثر الخطأ يذهب الصواب

(1) خطأ العنصر الأعظم هو الوحيد ، يمكن أن نجد أكثر من عنصر أعظمي أمثال على ذلك.

(2) خطأ يمكن أن نجد مثلاً المجموعة $\{\frac{1}{n}\}$ لا تملك عنصر أصغري

(3) خطأ يكون ذلك إذا كانت إحدى المجموعتين تحتوي بالأخرى ومثلاً بإعطاء مثال واحد عديد منها $(Z,+)$

(4) صح

(5) خطأ مثال على ذلك $(R^*, \cdot)$ مثلاً (-1) مرتبته 2

(6) صح

(7) خطأ يوجد أيضاً 3 ، 7 مولدات الزمرة $(Z_8, +)$ بالإضافة إلى 1

(8) خطأ تكون الزمرة دوارة منه مع الزمرة $(\frac{Z}{11Z}, +)$ (أو كل زمرة دوارة ولا منتهية تماثل مع الزمرة $(Z,+)$)

(9) صح

(10) خطأ يجب أن تكون A دوارة

الجواب الثاني: (15 درجة) يجب أن نبرهن أن $H = \{x, x^{-1}\}$ ، أن $x^{-1} \in G$ وبالتالي $\langle x^{-1} \rangle \subseteq G$ ولنبرهن العكس. ليكن $a \in G$ عندئذ $a = x^{3}$ حيث $3 \in Z$ ومنه $a = (x^{-1})^{-3} \in \langle x^{-1} \rangle$ ومن ثم فإن $G \subseteq \langle x^{-1} \rangle$ مما سبق نجد $G = \langle x^{-1} \rangle$ أي أن x^{-1} يولد G ولما كان x يولد G فإن $\{x, x^{-1}\} \subseteq$

وبالعكس ليكن $y \in H$ عندئذ $G = \langle y \rangle$ حسب الفرض ومنه يوجد عددان صحيحان u, v بحيث يكون $y = x^{v}$ و $x = y^{u}$ وبالتالي يكون $x = x^{uv}$. إذاً لأن مرتبة x غير محدودة ومنه $v = \mp 1$ وبالتالي $y \in \{x, x^{-1}\}$ إذاً

الجواب الثالث: (15 درجة) لنأخذ المجموعات المرافقة اليسارية للزمرة الجزئية H في الزمرة ولنفرض أن عدد هذه المجموعات هو m ، أي أن m هو دليل H في G . وبما أن $\text{Card}\, xH = \text{Card}\, H$ لأن كل مجموعة مرافقة يسارية xH فإننا نستنتج أن كل مجموعة يسارية xH تتألف من k عنصراً ولما كان $G = H \cup xH \cup \dots \cup x H$ أن نكتب ... فإن ... $n = m \cdot k$ ... المطلوب

الجواب الرابع (20 درجة)

نقول عن الزمرة المنتهية G إنها p- زمرة إذا كانت مرتبتها قوة لـ p

3

أي إذا كانت $(G:1) = p^n$ حيث $n \in N$

وإذا كانت مرتبة الزمرة المنتهية G تقبل القسمة على العدد الأولي p وكانت p^k ($k \geq 1$) يقسم مرتبة الزمرة G و p^{k+1} لا يقسم مرتبة الزمرة G عندئذ أي زمرة جزئية من G مرتبتها p^k تسمى p- زمرة جزئية سيلوفية من G

فاذا) لتكن G p- زمرة ولنفرض أن $(G:1) = p^n$ حيث $n \in N^*$ ولتكن H زمرة جزئية من الزمرة G عندئذ حسب مبرهنة لاغرانج فان

$$p^n = (G:1) = (G:H)(H:1)$$

6

وهذا يبين لنا أن $(H:1)$ تقسم المقدار p^n ومنه $(H:1) = p^s$ حيث $s \leq n$

ومنه الزمرة الجزئية H هي p- زمرة.

برهان (ب) $(G:1) = 2 \cdot 3 \cdot 5$ ومجموعة قواسم العدد 30 هي $\{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$ وعدد الـ 2- زمرة جزئية سيلوفية إما 1 أو 3 أو 5 أو 15

وحسب مبرهنة سيلوف الأولى فإن الزمرة G تحوي 3- زمرة جزئية سيلوفية مرتبتها 3 وأخرى 5- زمرة جزئية سيلوفية مرتبتها 5. إن عدد جميع الـ 3 الجزئية السيلوفية التي مرتبة كل منها 3 يعطى بالعلاقة $3k+1$ ويجب أن يقسم مرتبة

4

وبالتالي يوجد في G إما زمرة جزئية واحدة فقط أو 10 زمر جزئية كل منها عبارة عن 3- زمرة سيلوفية مرتبتها 3 (نلاحظ أنه من أجل $k \neq 3$ و $k \neq 0$ فإن المقدار $3k+1$ لا يقسم مرتبة الزمرة)

كما أن عدد جميع الـ 5- زمر الجزئية السيلوفية التي مرتبة كل منها 5 يعطى بالعلاقة $5k+1$ وهذا العدد يجب أن يقسم مرتبة الزمرة ومنه توجد في G إما زمرة جزئية واحدة فقط أو 6 زمر جزئية كل منها عبارة عن 5- زمرة جزئية سيلوفية مرتبتها 5 (من أجل $k \neq 1$ و $k \neq 0$ العدد $5k+1$ لا يقسم مرتبة الزمرة G).

2

موعد الامتحان 15 - 1 - 2007

مدرس المقرر

جامعة البعث امتحانات الفصل الثاني للعام الدراسي 2006 – 2007
كلية العلوم أسئلة الدورة الثانية لمقرر البنى الجبرية (1) العلامة: 80 درجة
قسم الرياضيات سنة ثانية رياضيات الاسم: غنى الريا سمي

أجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الأول (36 درجة):

أجب بكلمة صح أو خطأ لكل مما يلي، مع ذكر التصويب أو التعليل لحالة الخطأ فقط:

(١) كل عنصر أصغري يكون عنصراً أصغراً في المجموعة $(M,\leq)$ المرتبة كلياً.
(٢) الفترة الحقيقية المغلقة $[0\ ,1]$ هي مجموعة تحقق الشرط الأصغري.
(٣) إن اجتماع الزمرتين الجزئيتين $2Z$ و$4Z$ في الزمرة $(Z,+)$ هي الزمرة الجزئية $4Z$.
(٤) كل عنصر من عناصر الزمرة الدوارة يولدها.
(٥) عدد مولدات الزمرة الدوارة التي مرتبتها 6 يساوي 3.
(٦) جميع مولدات الزمرة $(Z_{20},+)$ أعداد أولية.
(٧) إن مرتبة كل عنصر من عناصر الزمرة غير المنتهية تكون غير محدودة.
(٨) إن عدد جميع الزمر الجزئية في الزمرة الدوارة $G = <a>$ والتي مرتبتها 30 يساوي 8.
(٩) الزمرتان الإيزومورفيتان لهما القدرة نفسها والبنية الجبرية نفسها.
(١٠) إذا كانت G زمرة منتهية مرتبتها n وكان m عدداً صحيحاً موجباً يقسم n فإنه توجد زمرة جزئية في G مرتبتها m .
(١١) إذا كانت G زمرة منتهية و p عدداً أولياً فإن عدد جميع الـ p- زمرة جزئية سيلوفية المختلفة في G يقسم مرتبة G ويساوي kp حيث $k \in N$.
(١٢) إذا كانت G زمرة منتهية، و K p- زمرة جزئية سيلوفية ناظمية في G، عندئذ لا يوجد في G سوى p- زمرة جزئية سيلوفية واحدة فقط هي K .

السؤال الثاني (10 درجات):

لتكن G زمرة دوارة غير منتهية مولدة بالعنصر a من G، وليكن $f : Z \to G$ التطبيق المعرف بالشكل : $f(n) = a^n, \quad \forall n \in N$. برهن أن f متباين.

السؤال الثالث (20 درجة):

ليكن $f : G \to G'$ هومومورفيزماً زمرياً .
(أ) برهن أن $\ker f$ زمرة جزئية و ناظمية في G .
(ب) إذا كانت H زمرة جزئية ناظمية في G. برهن أن التطبيق $\pi : G \to G/_H$ هومومورفيزماً زمرياً غامراً.
(ج) برهن أن $\ker \pi = H$.

السؤال الرابع (14 درجة):

إذا كان كل من K و H زمرة جزئية ناظمية في الزمرة G و $G = K \oplus H$ المجموع المباشر للزمرتين K و H أي أن $G = K \cdot K$ و $K \cap H = <e>$. عندئذ :
(أ) أياً كان $h \in H$ و $k \in K$ فبرهن أن $hk = kh$.
(ب) أياً كان $g \in G$ فإن g يكتب بصورة وحيدة على النحو $g = kh$ حيث $k \in K$ و $h \in H$.

حمص 19 – 6 – 2007

مع أطيب التمنيات بالنجاح والتوفيق
د . إيمان الخوجة

(١)

يع مقرر البنى الجبرية (١)
رياضيات (حوالة المقرر)
العام الدراسي 2006 - 2007

الجواب الأول

(1) صح
(2) خطأ لو أ.
(3) خطأ هي ما الأصغري 0 لا ينتمي إليها.
(4) خطأ يوجد 2Z.
(5) خطأ مولدان فقط
(6) خطأ لأن زمرة التي مرتبطة 6 يساوي 2.
(7) خطأ (مثال أولي.
(8) خطأ مولدات بنية 2).
(9) صح مرتبطة 30 ثنائية. (عدد الزمر ...)
(10) خطأ (إذا كان .
(11) خطأ عدد جميع ا. $\{1,7,11,13,17,23,19,29\}$
(12) صح سيلوفية في G يساوي $1+kp$.

الجواب الثاني [D]

لنفرض جدلاً أن
وأن $f(n)=f(m)$ أي مثباين عندئذ يوجد $n,m\in Z$ بحيث $n\neq m$ $a^{n-m}=a^0=e$ فإن المجموعة ... من أن $n>m$ عندئذ $n-m>0$. ب أن
أصغر ... t . وأن ... $S=\{k: \frac{t}{f}=e\}$ غير خالية وبالتالي تحوي عنصراً
واضح أن ... $\{e,a,a^2,\dots,a^{t-1}\}\subseteq G$
ليكن $x\in G$ عندئذ $x=a^s$ ...
يوجد $q,r\in Z$ بحيث $s=tq+r$ وحسب خوارزمية القسمة $0\leq$
$a^s=a^{qt+r}=a^{qt}.a^r=(a^t)^q a^r = a^r$